

ORSAY

Série A. N°

N° D'ordre :

865

Université Paris-Sud XI

Faculté des Sciences d'Orsay

AO. 865

THESES

présentées

pour obtenir le grade de

Docteur ès-Sciences Mathématiques

par Daniel WEIL

1^{ère} Thèse: << Actions de R^2 sur les variétés de Dimension 3 >> .

2^{ème} Thèse: Propositions données par la Faculté.

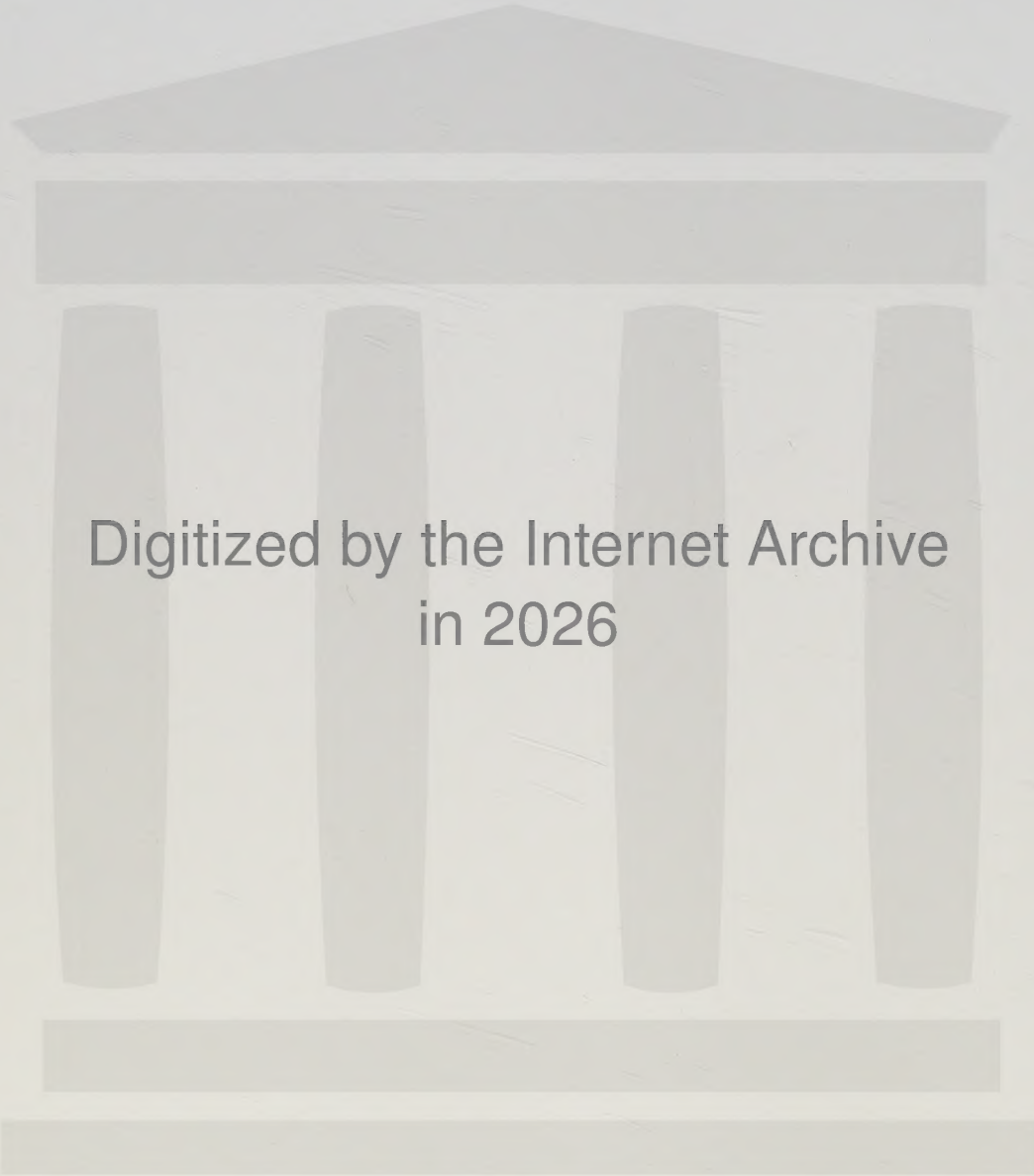
soutenues le 26 novembre 1971 devant la Commission d'examen

MM. H.Cartan } Président

C.Godbillon

H.Rosenberg } Examineurs

P. Samuel



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41550410_0019

Université Paris-Sud XI

Faculté des Sciences d'Orsay

THESES

présentées

pour obtenir le grade de

Docteur ès-Sciences Mathématiques

par Daniel WEIL

1 ère Thèse: << Actions de R^2 sur les variétés de Dimension 3 >> .

2 ème Thèse: Propositions données par la Faculté.

soutenues le 26 novembre 1971 devant la Commission d'examen

MM. H.Cartan } Président

C. Godbillon

H. Rosenberg } Examineurs

P. Samuel

UNIVERSITEIT LEIDEN

Faculté des Sciences Exactes

THÈSE

présentée

pour obtenir le grade de

Docteur en Sciences Mathématiques

par Daniel Weil



1ste Thèse : Études de la fonction ζ de Riemann

2de Thèse : Théorie des formes quadratiques

Le manuscrit a été soumis le 15 novembre 1921 devant la Commission d'examen

M. H. G. (M. H. G.)

C. G. (C. G.)

Président : M. H. G.

Secrétaire : C. G.

Je remercie Henri CARTAN d'avoir bien voulu accepter la présidence du Jury.

Claude GODBILLON, avec qui j'ai eu de nombreuses discussions enrichissantes, et Pierre SAMUEL qui m'a permis d'approfondir mes connaissances d'Algèbre, ont bien voulu se joindre à ce Jury et je les en remercie.

Il m'est difficile de parler ici de tous mes camarades d'Orsay ou d'Ailleurs dont les avis et les encouragements ont été précieux ; je citerai néanmoins S. BLANK, M. HERMAN, F. LAUDENBACH, M. LEGENDRE, G. LEVKO, D. MANDEL, P. REKOP, J.-P. SCHREIBER, N. SIBONY, D. TISCHLER et plus particulièrement G. CHATELET et R. ROUSSARIE dont la collaboration fructueuse et enrichissante m'ont été particulièrement importante.

La place me manque ici pour exprimer ma reconnaissance à mon ami H. ROSENBERG pour ce qu'il m'a apporté dans bien des domaines. Je le remercie donc simplement pour les Mathématiques qu'il m'a enseignées, pour ses encouragements et pour la possibilité que j'ai eu de participer à ses recherches.

Enfin, je remercie tous les membres du personnel d'Orsay qui ont participé à la réalisation matérielle de ce travail et plus particulièrement J. BAUDON qui a tapé la quasi-totalité du manuscrit.

TABLE DES MATIERES

	<u>Pages</u>
<u>INTRODUCTION.</u>	2
<u>PARTIE I. THEOREMES D'APPROXIMATION D'ACTIONS DE $\mathbb{R}^2$</u> <u>SUR LES VARIETES DE DIMENSION 3.</u>	
I.0. Introduction	7
I.1. Démonstrations des Théorèmes 1.1. et 1.2.	9
I.2. Théorème 2.1.	
I.2.A. Définitions préliminaires	12
I.2.B. Quelques propriétés des retours	14
I.2.C. Théorème de linéarisation	21
I.2.D. Réplique linéaire et "minimum lift" ..	32
I.2.E. Démonstration du théorème 2.1.	33
I.2.F. Conclusion	45
<u>PARTIE II. LES VARIETES FERMEES DE DIMENSION 3 ET DE RANG 2.</u>	
II.0. Introduction	46
II.1. Exemples	50
II.2. Le lemme fondamental	56
II.3. Le théorème principal	69
II.4. Généralisations	76 bis
<u>PARTIE III. CLASSIFICATION DU TYPE TOPOLOGIQUE DES ACTIONS DE $\mathbb{R}^2$ SUR</u> <u>LES VARIETES FERMEES ORIENTABLES DE DIMENSION 3.</u>	
III.0. Introduction	77
III.1. Quelques propriétés générales sur les fibrés $T^2 \times I/F$	
III.1.A. Définition, notations et groupe fondamental	79
III.1.B. Une méthode de disjonction de certaines sous-variétés de $T^2 \times I/F$.	80
III.1.C. Plongements incompressibles de tores dans les fibrés $T^2 \times I/F$	86
III.1.D. Plongements incompressibles de tores dans $T^2 \times I/F$ (suite)	91



	<u>Pages</u>
III.2. Quelques propriétés des actions de $\mathbb{R}^2$ sur les variétés fermées orientables de dimension 3	99
III.3. Les théorèmes de classification.	
III.3.0. Exemples	104
III.3.1. Démonstration du théorème 3.1.	105
III.3.2. Les modèles	106
III.4. Quelques remarques et généralisations	116
<u>APPENDICE. EQUIVALENCE DE FIBRES SUR S^1 DE FIBRE T^2.</u>	121
<u>BIBLIOGRAPHIE.</u>	130

-:-:-:-:-

INTRODUCTION

Soit V une variété connexe, de classe C^∞ et de dimension n . Une action C^r de $\mathbb{R}^k$ sur V est une application Φ , de classe C^r , de $\mathbb{R}^k \times V$ sur V ayant les propriétés suivantes :

- i) $\Phi(0, p) = p$, pour tout p dans V ,
- ii) $\Phi(t_1 + t_2, p) = \Phi(t_1, \Phi(t_2, p))$ pour tout t_1 et t_2 dans $\mathbb{R}^k$ et pour tout p dans V .

On dit que l'action Φ est non dégénérée, ou localement libre, si toutes les orbites de Φ sont des immersions de $\mathbb{R}^k$.

[Dans la suite, les variétés considérées seront supposées connexes et de classe C^∞].

A une action Φ , non dégénérée, de $\mathbb{R}^k$ sur V on peut associer un feuilletage $\mathcal{F}(\Phi)$ de V , dont les feuilles sont les orbites de Φ , et on fait ainsi intervenir la théorie des feuilletages dans l'étude des actions non dégénérées. Si p est un point de V et si Φ est non dégénérée, le sous-groupe d'isotropie H_p en p est un sous-groupe discret de $\mathbb{R}^k$ et ainsi les feuilles de $\mathcal{F}(\Phi)$ sont homéomorphes à des variétés produit $\mathbb{R}^q \times T^{k-q}$ ($q = (0, \dots, k)$ et T^m désigne le tore de dimension m). Bien entendu, si Φ est une action non dégénérée de $\mathbb{R}^k$ sur une variété V compacte, de dimension n , alors $k \leq n$ et si $k = n$, l'orbite d'un point est à la fois ouverte et fermée dans V et $V = T^n$. (Rappelons que les seuls sous-groupes, discrets de $\mathbb{R}^k$ sont les $\mathbb{Z}^q$ ($q \leq k$)).

Pour un point p , fixé dans V , on obtient une application Φ_p de $\mathbb{R}^k$ dans V . L'image, par $d\Phi_p$, d'une base de $T_0 \mathbb{R}^k$ fournit donc k vecteurs dans $T_p V$ et on obtient ainsi, quand Φ est non dégénérée, k champs de vecteurs définis sur V , qui sont linéairement indépendants et qui commutent deux à deux. On définit alors le rang d'une variété V comme le nombre maximum de champs de

vecteurs (en général de classe C^2 au moins) définis sur V , qui sont linéairement indépendants et qui commutent deux à deux.

Si V est une variété fermée, (i.e. : compacte et sans bord), le rang de V est égal au plus grand entier k tel que V puisse être muni d'une action non dégénérée de $\mathbb{R}^k$ (si V est ouverte, les deux entiers définis ci-dessus sont, en général, distincts).

Le premier type d'action de $\mathbb{R}^k$ sur une variété, dont l'étude s'est considérablement développée ces dernières années, est le cas $k = 1$. L'étude des systèmes dynamiques s'est faite sous différents aspects : existence, type topologique des solutions, stabilité structurelle, etc... . D'une manière générale,

($k \geq 1$), les questions qui se sont posées jusqu'à présent sont liées à l'existence d'actions et à la classification du type topologique de ces actions, problèmes qui se posent plus généralement en théorie des feuilletages (on commence à s'intéresser maintenant à des problèmes de stabilité structurelle pour les feuilletages). Mais, en dehors des systèmes dynamiques, les résultats obtenus l'ont été sur des actions ou des feuilletages de codimension 1. Très peu de choses sont connues en codimension supérieure et les difficultés semblent considérables.

Une grande partie du présent travail est consacrée à l'étude des variétés fermées de dimension 3 et de rang 2, mais avant de préciser les résultats que nous obtenons, nous donnerons un bref résumé des résultats connus concernant les actions de $\mathbb{R}^k$ et le rang des variétés fermées (on retrouvera certain de ces résultats dans l'introduction de la partie II).

Pour les variétés fermées de dimension 2, T^2 est la seule qui soit de rang 2. La bouteille de Klein est de rang 1 car elle admet un champ de vecteurs sans singularité et les autres variétés fermées de dimension 2 sont de rang 0.

Dans [5], E. Lima démontre que le rang d'une variété fermée, simplement connexe, de dimension 3 est 1. (On peut facilement étendre ce résultat aux

variétés fermées de dimension 3 ayant un groupe fondamental fini). H. Rosenberg, dans [12], démontre que le rang de $S^2 \times S^1$ est 1, et dans [14] que le rang d'une variété simplement connexe de dimension n est inférieur à $n-1$.

Par ailleurs, S.P. Novikov [8], montre que le rang d'une variété fermée de dimension 3 est 1 si $\Pi_1(V) = 0$ ou si $\Pi_2(V) \neq 0$, et H. Rosenberg-R. Roussarie trouvent le même résultat dans le cas $H_1(V, \mathbb{Q}) = 0$ ($\mathbb{Q}$ est le corps des rationnels et V est supposé orientable) [16].

Enfin, si V est une variété de dimension 3 (ouverte ou fermée) telle que $\Pi_2(V) \neq 0$, elle admet un champ de vecteurs sans singularités mais pas d'action de $\mathbb{R}^k$, $k > 1$ [13].

Nous utiliserons également, dans la suite, les résultats de Sacksteder [22] et notamment le théorème suivant : si Φ est une action non dégénérée de $\mathbb{R}^{n-1}$ sur une variété fermée de dimension n , et si Φ n'a pas d'orbites compactes, alors toutes les orbites de Φ sont denses dans V .

La partie I de ce travail est consacrée à des résultats d'approximations dont le "modèle" en dimension 2 est le suivant : soient M une variété de dimension 2 et X un champ de vecteurs sur M de classe C^r ($r \geq 1$).

On suppose que X est induit par une action de $\mathbb{R}$ sur V , et soit $p \in M$ un point d'un ensemble minimal pour cette action (i.e. : un ensemble fermé, non vide, invariant par l'action de $\mathbb{R}$, et minimal pour ces propriétés).

On s'est posé le problème suivant : Existe-t-il un champ de vecteurs Y , C^1 -proche de X (au sens de la topologie naturelle sur l'espace des C^r -sections du fibré tangent de M) et tel que la courbe intégrale passant par p soit compacte ? Dans [10] C. Pugh répond affirmativement à cette question en considérant des variétés M de dimension ≥ 2 . (Dans [9] M. Peixoto donne une démonstration dans le cas $\dim M = 2$).

Parallèlement, on peut se demander si, dans une variété de dimension 3 munie d'une action Φ non dégénérée de $\mathbb{R}^2$ admettant une orbite cylindrique

$(S^1 \times \mathbb{R})$ "récurrente" (i.e. : qui revient sur elle-même d'une manière aussi proche que l'on veut), on peut approcher Φ par une action ψ ayant une orbite compacte (T^2) "proche" de l'orbite cylindrique.

C'est ce problème qui est traité dans la partie I : dans le cas où V est compacte, on peut approcher Φ par une action ψ ayant des orbites compactes ; dans le cas où V n'est pas compacte les résultats sont plus faibles et l'approximation ne s'applique qu'au champ de 2-plans induit par Φ sur V (Théorèmes I.11 et I.12). Les difficultés viennent du fait que le problème se pose en classe C^1 , car topologiquement le problème n'est pas très difficile.

La partie II est essentiellement consacrée à la démonstration du résultat suivant : les variétés fermées orientables de dimension 3 et de rang ≥ 2 sont les fibrés sur S^1 de fibre T^2 (Théorème II.3.1.). Sachant que seul le tore T^3 est de rang 3 et que toutes les variétés fermées, orientables, de dimension 3 peuvent être munies de champ de vecteurs sans singularité, ce résultat permet de classifier les variétés fermées orientables de dimension 3 en fonction de leur rang. Signalons, en outre, (voir la fin de la partie II) que ces résultats viennent d'être généralisés par G. Chatelet - H. Rosenberg.

Ceci nous amène au problème de la classification du type topologique des actions de $\mathbb{R}^2$ sur les variétés fermées orientables de dimension 3, que nous étudions dans la partie III. (Une action Φ , sur V , est équivalente à une action ψ sur V' , s'il existe un homéomorphisme de V sur V' qui envoie les orbites de Φ sur les orbites de ψ). L'idée essentielle est de montrer que l'on peut se ramener à l'étude d'actions sur $T^2 \times [0,1]$ qui sont tangentes au bord (cas où l'action de départ admet des orbites compactes) ou transverses au bord (cas où aucune orbite n'est compacte). On montrera, parallèlement, qu'à tout fibré orientable sur S^1 , de fibre T^2 , on peut associer un élément de $SL_2(\mathbb{Z})$ et que l'existence d'orbites compactes, pour les actions de $\mathbb{R}^2$ sur ces variétés, dépend de l'existence de valeurs propres, dans $\mathbb{Z}$, pour cet élément de $SL_2(\mathbb{Z})$ (Théorème III. 2.2.).

Pour les actions de $\mathbb{R}^2$ sur $T^2 \times [0,1]$, on se sert des techniques de [1] pour étudier les différents types topologiques possibles.

Enfin, on se servira des résultats démontrés dans la partie III, pour montrer, dans l'appendice, qu'une variété orientable fibré sur S^1 de fibre T^2 n'admet, essentiellement, qu'une seule structure de ce type.

7

Partie I.

THEOREMES D'APPROXIMATION D'ACTIONS DE $\mathbb{R}^2$ SUR LES VARIETES
DE DIMENSION 3 [21] .

- : : - : : -

I.O.

INTRODUCTION.— (Dans tout ce qui suit on écrit "action" à la place de "action non dégénérée").

On considère une variété V de dimension 3 de classe C^r ($r > 2$) et ayant un bord vide. Soit Φ une action orientable de $\mathbb{R}^2$ sur V de classe C^r . Les orbites de Φ sont des immersions injectives de $\mathbb{R}^2$ (orbites planes) de $S^1 \times \mathbb{R}$ (orbites cylindriques) ou du tore $T^2 = S^1 \times S^1$ (orbites compactes).

DEFINITION 0.1.— Un sous-ensemble A de V est Φ -minimal s'il est fermé, non vide, invariant par l'action Φ et minimal pour ces propriétés.

Soit Γ une orbite non plane de Φ . Nous verrons dans la suite (1.4) qu'il existe deux champs de vecteurs X et Y tels que $[X, Y] = 0$ et qui définissent l'action Φ en vérifiant de plus les propriétés suivantes : pour tout point $p \in \Gamma$ l'orbite de Y en p est fermée et de période 1. Notons C_p l'orbite de Y en p pour $p \in \Gamma$ et $x(t, q)$ le flot du champ X ($t \in \mathbb{R}$, $q \in V$).

DEFINITION 0.2.— Une orbite non plane Γ est récurrente si pour tout voisinage $\mathcal{U}(C_p)$ de C_p dans V et tout $t_0 \in \mathbb{R}$, il existe $t > t_0$ tel que $x(t)(C_p) \subset \mathcal{U}(C_p)$.

On peut remarquer que toute orbite compacte est récurrente, que la fermeture

dans V d'une orbite récurrente est Φ -minimal et que si V est compacte et Γ une orbite cylindrique dont la fermeture dans V est Φ -minimal alors Γ est récurrente [18] .

Notre but, dans cette partie, est d'approcher une action Φ , ayant une orbite cylindrique récurrente, par une action ψ admettant une orbite compacte proche (dans un sens que nous définirons) de l'orbite cylindrique récurrente de Φ . Dans certains cas les résultats obtenus sont comparables à ceux démontrés par Ch. PUGH [10] pour le "lemme de fermeture" des champs de vecteurs.

On désignera par $T^1(V)$ le fibré tangent à la variété V et par $\mathcal{X}^1(V)$ l'espace des C^{r-1} sections de ce fibré, que l'on munit de la C^1 -topologie.

De même, on désignera par $T^2(V)$ le fibré des 2-plans de V et par $\mathcal{X}^2(V)$ l'espace des champs de 2-plans de classe C^{r-1} muni de la C^1 -topologie.

On supposera ces C^1 -topologies définies par des métriques que l'on notera $|X, Y|_{C^1}$ pour X et Y appartenant à $\mathcal{X}^1(V)$ ou à $\mathcal{X}^2(V)$.

A chaque action Φ de classe C^r sur V on associe un champ de 2-plans noté $P\Phi$ de la façon suivante :

Pour tout $m \in V$ on pose : $P\Phi(m) = \frac{\partial}{\partial t} \Phi \Big|_{(0,m)} [T_0 \mathbb{R}^2]$ où $t \in \mathbb{R}^2$ et $T_0 \mathbb{R}^2$ est le plan tangent à l'origine de $\mathbb{R}^2$. Le champ $P\Phi$ est complètement intégrable et c'est le champ tangent au feuilletage de V associé à Φ .

Enfin, on suppose qu'une métrique est choisie dans V et une C^1 -métrique dans $\text{Diff}(V)$.

I.1.

THEOREME 1.1.- Soit V une variété de classe C^r ($r > 2$) de dimension 3 compacte et sans bord ; soit Φ une action orientable de classe C^r de $\mathbb{R}^2$ dans V telles que toutes les orbites de Φ ne soient pas planes. Alors : pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une action orientable ψ , de classe C^r , de $\mathbb{R}^2$ dans V telle que $P\psi$ soit $\varepsilon - C^1$ -proche de $P\Phi$ et admettant une orbite compacte.

THEOREME 1.2.- Soit V une variété de classe C^r ($r > 2$) de dimension 3 (compacte ou non) sans bord ; soit Φ une action orientable de $\mathbb{R}^2$ dans V telles que toutes les orbites de Φ ne soient pas planes. On suppose de plus que V est Φ -minimal. Alors : pour toute orbite Γ non plane, et pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une action orientable ψ de $\mathbb{R}^2$ dans V telle que $P\psi$ soit $\varepsilon - C^1$ -proche de $P\Phi$ et telle que ψ admette une orbite fermée ε -proche de Γ .

Remarque : on dira que le tore plongé T^2 et l'orbite Γ sont ε -proche si il existe deux plongements h et g de $S^1 \times I$ dans V ($I = [0,1]$) tels que :

- $h(S^1 \times I)$ est une sous-variété de Γ .
- $g(S^1 \times I)$ est le tore T^2 (g est surjective sur T^2 et induit en fait un plongement du tore d'image T^2).
- Pour tout $t \in S^1 \times I$ $\text{dist}(h(t), g(t)) < \varepsilon$.

Démonstration des théorèmes 1.1 et 1.2 : (On suppose que l'action Φ ne possède de aucune orbite compacte si non le problème est résolu en prenant $\Phi = \psi$.)

LEMME 1.3.- Soient V une variété de dimension 3 compacte sans bord et Φ une action de $\mathbb{R}^2$ sur V (V et Φ de classe C^r ($r > 2$)), sans orbites compactes.

Alors V est un ensemble Φ -minimal et donc toutes les orbites de Φ sont partout denses dans V .

(En fait V est alors l'ensemble Φ -minimal).

Démonstration du lemme 1.3 : Supposons que V ne soit pas Φ -minimal.

Puisque V est compacte il existe $M \subset V$ un ensemble Φ -minimal. M n'étant pas une orbite compacte et $M \neq V$, M est la fermeture d'une orbite exceptionnelle [22]. Si Φ est de classe au moins 2 ceci est impossible. Les orbites sont denses car la fermeture dans V d'une orbite quelconque ne peut être que V .

Le lemme 1.3 ramène donc les hypothèses du théorème 1.1 aux hypothèses (moins fortes) du théorème 1.2. C'est avec l'hypothèse V est Φ -minimal que nous allons poursuivre la démonstration de ces théorèmes.

LEMME 1.4.- Dans les hypothèses des théorèmes 1.1 ou 1.2 et si Φ n'a pas d'orbites compactes, alors toutes les orbites de Φ sont cylindriques et partout denses.

Démonstration du lemme 1.4 : Soit Γ une orbite cylindrique de Φ , et soit p un point de Γ . Dans $\mathbb{R}^2$ le sous-groupe d'isotropie de p est isomorphe à $\mathbb{Z}$ et est de la forme $\{n\vec{v} / n \in \mathbb{Z}\}$ où $\vec{v}$ est un vecteur non nul de $\mathbb{R}^2$. Soit $\vec{u}$ un second vecteur de $\mathbb{R}^2$ formant une base avec $\vec{v}$. On peut associer à l'action Φ les deux champs de vecteurs suivants :

$$X(m) = \left. \frac{\partial}{\partial t} \Phi \right|_{(0,m)} (\vec{u}) \quad \text{et} \quad Y(m) = \left. \frac{\partial}{\partial t} \Phi \right|_{(0,m)} (\vec{v})$$

pour tout m dans V . Notons $x(\tau, m)$ et $y(v, m)$ les flots de X et Y respectivement.

Remarquons que $\Phi(\tau\vec{u} + v\vec{v}, p) = x(\tau) [y(v)(p)] = y(v) [x(\tau)(p)]$ pour tout $t = \tau\vec{u} + v\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ et que l'orbite de Y en p est fermée et de période 1. Puisque X et Y commutent l'orbite de Y en n'importe quel point de Γ est fermée et de

période 1. Soit m un point quelconque de V . Il existe une suite de points $\{m_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ de Γ tendant vers m puisque Γ est partout dense. Par continuité cela entraîne que $y(1, m) = m$ et par conséquent il existe un entier positif k tel que $\frac{1}{k}$ soit la période de l'orbite de Y passant par m . Mais, par hypothèse, l'orbite de Φ passant par m est aussi partout dense (V est Φ -minimal d'après 1.3). En changeant, dans le raisonnement ci-dessus, les rôles de Γ et de l'orbite de Φ passant par m , on remarque que la période de l'orbite fermée de Y en p est $\frac{1}{kk'}$ pour un certain entier positif k' . On sait que cette période est 1 et donc que $k = k' = 1$. Puisque Φ n'admet aucune orbite compacte, ceci prouve que toutes les orbites de Φ sont cylindriques et partout denses.

Toutes les orbites de Φ sont donc cylindriques récurrentes et on termine la démonstration des théorèmes 1.1 et 1.2 de la façon suivante :

Par rapport aux deux champs X et Y définis dans 1.4 on peut trouver une sous-variété $U \subset Y$ difféomorphe à $S^1 \times I \times J$ (I et J représentent l'intervalle $[0, 1]$) de coordonnées $\theta \in S^1$, $x \in I$ et $z \in J$ avec $X = \frac{\partial}{\partial x}$ et $Y = \frac{\partial}{\partial \theta}$. L'intersection de U avec les orbites de Φ sont les cylindres $z = C^{ste}$. La démonstration de Pugh [10] se transporte immédiatement à cette situation en remplaçant son voisinage de coordonnée rectangulaire par le voisinage U . Les "retours" d'une orbite dans U se font suivant les cylindres $z = C^{ste}$ et la seule différence est l'adjonction de la variable θ qui joue un rôle muet dans la démonstration.

Plus précisément il existe un champ de vecteur X_1 qui coïncide avec X dans $V - U$, qui est de classe C^r , qui commute partout avec Y et qui admet des orbites compactes. Alors, si ϕ est l'action de $\mathbb{R}^2$ sur V associée aux champs X_1 et Y , ϕ possède une orbite compacte au moins ; ε étant donné, il est clair qu'en prenant X_1 assez proche de X les conclusions des théorèmes 1.1 et 1.2, sont vérifiées.

I.2.

La suite de la Partie I est consacrée à la démonstration du

THEOREME 2.1.- Soit V une variété de classe C^r ($r > 2$) de dimension 3, (compacte ou non) et sans bord. Soit Φ une action orientable de classe C^r de $\mathbb{R}^2$ sur V et telles que toutes les orbites de Φ ne soient pas planes, alors :

Pour toute orbite Γ non plane et récurrente et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une sous-variété de V difféomorphe au tore T^2 , ε -proche de l'orbite Γ , telle que le champ de 2-plans tangent à cette sous-variété puisse être prolongé en un champ de 2-plans sur toute la variété, $\varepsilon - C^1$ proche du champ $P\Phi$.

I.2.A.

DEFINITIONS PRELIMINAIRES.- Choisissons un point p appartenant à une orbite cylindrique Γ de V . (Nous supposons bien entendu que l'orbite Γ n'est pas compacte sinon le problème est trivialement résolu). Comme dans 1.4, l'action Φ est définie par deux champs de vecteurs X et Y , dont les flots respectifs sont notés $x(t, m)$ et $y(s, m)$ pour tout m dans V , tels que $[X, Y] = 0$ et tels que l'orbite Γ apparait comme formée d'orbites fermées du champ Y de périodes égales à 1, ces orbites fermées étant les cercles méridiens d'un cylindre immergé dont les génératrices sont les orbites du champ X contenues dans Γ .

L'action Φ étant orientable, il existe un champ N transversal à Φ (Par exemple le champ N de norme 1 orthogonal au champ de plans $P\Phi$ pour la métrique choisie sur V). On note par $n(u)(p)$ son flot.

Soit c une orbite fermée du champ Y contenue dans Γ . On suppose maintenant que Γ est récurrente et par conséquent que $\bar{\Gamma}$ est Φ -minimal.

Soit $A_c = \{n(u)(c) / -\alpha \leq u \leq \alpha\}$ où α est choisi suffisamment petit pour que A_c soit difféomorphe à $S^1 \times [-\alpha, \alpha]$ ce qui est possible puisque l'action Φ est orientable. On paramètre $c \approx S^1$ par $\theta \in [0, 1]$ tel que $\frac{\partial}{\partial \theta} = Y|_c$.

On suppose également α suffisamment petit pour que les difféomorphismes locaux d'holonomie soient définis des segments $\{0\} \times [-\alpha, \alpha]$ dans $\{\theta\} \times [-\alpha, \alpha]$ pour tout $\theta \in [0, 1]$. (On considère l'holonomie au-dessus des arcs 0θ de c , dans le sens de l'orientation du champ Y).

On définit alors ;

$$U_0 = \{x(t)(A_0) \mid -\beta \leq t \leq \beta\}$$

en choisissant β suffisamment petit pour que U_0 soit difféomorphe à $A_0 \times [-\beta, \beta]$.

On appellera retour les intersections de Γ avec A_0 qui sont difféomorphes à S^1 . L'ensemble des retours de Γ sera noté D .

Soient c' et c'' deux retours de Γ distincts et distincts de c . (Ils existent par définition du terme "récurrent"). Les deux retours c' et c'' définissent un domaine A de A_0 difféomorphe à $S^1 \times I$. On supposera que c, c' et c'' sont tels que :

$$\partial A = c' \cup c'' \quad c \subset \overset{\circ}{A}$$

(Au besoin on redéfinit c, c' et c''). Nous allons introduire sur A les coordonnées (θ, z) telles que :

$$\begin{aligned} \theta &\in [0, 1] & c &= \{p \in A \mid z(p) = 0\} \\ z &\in [-1, +1] & c' &= \{p \in A \mid z(p) = -1\} \\ & & c'' &= \{p \in A \mid z(p) = +1\} \end{aligned}$$

et telles que $\frac{\partial}{\partial z} = N$ (au besoin on multiplie N par une constante), $\frac{\partial}{\partial \theta} = Y$ sur l'orbite c . On désignera par $R_{0_c} = \{p \in A \mid \theta(p) = \theta_0\}$.

On note $\gamma(\theta, z) = \gamma_\theta(z)$ les applications de R_0 dans R_θ que définissent les difféomorphismes locaux d'holonomie indiqués plus haut. (Pour tout θ , $\gamma(\theta, z)$ est surjective par construction).

En fait γ n'est pas défini sur A mais sur $[0,1] \times [-1,+1]$ car, en général, $\gamma(0,z)$ qui est égal à id_{R_0} sera différent de $\gamma(1,z)$ difféomorphisme de R_0 sur R_0 .

Il est clair que $(\theta, \gamma(\theta,z))$ est une immersion C^r de $[0,1] \times [-1,+1]$ dans A . ($\text{Im } \gamma(\theta,z) = R_\theta \times [-1,+1]$). Notons Π la projection de U_0 sur A_0 et U l'image réciproque $\Pi^{-1}(A)$.

Enfin, quitte à modifier le vecteur $\vec{v}$ de $\mathbb{R}^2$ qui définissait le champ X , on peut supposer que :

U est difféomorphe à $A \times [-2,+2]$ avec, dans U , les coordonnées (x,θ,z) ; $x \in [-2,+2]$, $\theta \in [0,1]$; $z \in [-1,+1]$ et $X = \frac{\partial}{\partial x}$.

Par ailleurs, si $p \in D$ est un retour de Γ on notera $p(\theta)$ la valeur de z telle que dans A , $(\theta, p(\theta)) = R_\theta \cap p$ intersection unique de R_θ et de p . $p(\theta)$ est une fonction périodique et de période 1.

I.2.B.

QUELQUES PROPRIETES DES RETOURS.- Dans cette partie nous allons préciser la position relative des éléments de D , ce qui implique, au préalable, la définition d'une distance sur D .

DEFINITION B.1.- Soient p et q deux retours dans A (i.e. : deux éléments de D). On appelle Distance de p à q =

$$|p,q| = \sup_{\theta \in [0,1]} |p(\theta), q(\theta)| \quad \text{où} \quad |p(\theta), q(\theta)| = |p(\theta) - q(\theta)|$$

On vérifie aisément que B.1. définit une distance sur D .

On définit par ailleurs une relation d'ordre totale sur D .

DEFINITION B.2.- Soient p et p' deux éléments de D . On dira que p est strictement inférieur à p' et on notera $p < p'$ si, et seulement si, pour $x_0 \in \mathbb{C}$

et t et t' vérifiant :

$$x(t)(x_0) \in p \quad \text{et} \quad x(t')(x_0) \in p' \quad \text{on a} \quad t < t'.$$

$(x(t, \cdot))$ est le flot du champ X .

Cette propriété est manifestement indépendante du point x_0 de C et la relation d'ordre est bien définie.

LEMME B.3. [10].- Soit Γ une orbite cylindrique récurrente de l'action Φ .

Pour tout $v > 0$ et tout λ , $0 \leq \lambda < 1$, il existe p et q appartenant à

D qui vérifient les conditions :

i) $|p, c| < v$, $|q, c| < v$, $p < q$.

ii) $\forall r \in D$ tel que $p < r < q$ on a :

$$\underline{|p, r| > \lambda |p, q|, \quad |q, r| > \lambda |p, q|}.$$

Preuve du Lemme B.3.- Puisque l'orbite Γ est récurrente on peut choisir p_0 et q_0 appartenant à D tels que :

$$|p_0, c| < \frac{1}{2} v(1 - \lambda) \quad \text{et} \quad |q_0, c| < \frac{1}{2} v(1 - \lambda) \quad \text{avec} \quad p_0 < q_0.$$

Si le couple (p_0, q_0) vérifie ii) on pose $(p, q) = (p_0, q_0)$.

Si le couple (p_0, q_0) ne vérifie pas ii) on a certainement l'une des deux propriétés suivantes :

a) il existe $r \in D$ tel que $|p_0, r| \leq \lambda |p_0, q_0|$ et $p_0 < r < q_0$; et on pose $(p_1, q_1) = (p_0, r)$;

ou

b) il existe $r \in D$ tel que $|q_0, r| \leq \lambda |p_0, q_0|$ et $p_0 < r < q_0$; avec $|p_0, r| > \lambda |p_0, q_0|$; et on pose $(p_1, q_1) = (r, q_0)$.

On recommence l'opération avec le couple (p_1, q_1) et on obtient ainsi une

suite de couples (p_i, q_i) . Cette suite a un nombre fini de termes car A est compacte et transverse à Γ ; de plus pour chaque couple (p_i, q_i) de la suite on a :

$$p_0 \leq p_i \leq q_0, \quad p_0 \leq q_i \leq q_0.$$

Ainsi définie, la suite (p_i, q_i) va de (p_0, q_0) à (p_m, q_m) . Trivialement, le couple (p_m, q_m) vérifie la condition ii). (Il est, bien sûr, possible que aucun retour $r \in D$ ne vérifie $p_m < r < q_m$).

Nous allons démontrer que le couple (p_m, q_m) vérifie aussi la condition i).

On a : $|p_i, q_i| \leq \lambda^i |p_0, q_0|$. Définissons la suite σ_i par :

$$\sigma_m = p_m$$

$$\sigma_{m-1} = p_m \quad \text{si} \quad p_{m-1} = p_m$$

$$\sigma_{m-1} = q_m \quad \text{si} \quad q_{m-1} = q_m \quad \text{etc...} \quad \text{jusqu'à} \quad \sigma_0 \quad \text{qui est égal soit à } p_0 \text{ soit à } q_0.$$

Il est clair que l'on a alors les inégalités suivantes :

$$|\sigma_{i+1}, \sigma_i| \leq \lambda |p_i, q_i| \quad \text{donc}$$

$$|\sigma_{i+1}, \sigma_i| \leq \lambda^{i+1} |p_0, q_0| \leq \lambda^{i+1} \frac{1}{2} v(1 - \lambda)$$

$$\sigma_m = p_m$$

$$|p_m, c| \leq \sum_{i=0}^{m-1} |\sigma_{i+1}, \sigma_i| + |\sigma_0, c|$$

et il vient :

$$|p_m, c| \leq \frac{1}{2} v (1 - \lambda) \frac{1}{1 - \lambda} + \frac{1}{2} v (1 - \lambda) = \frac{1}{2} v (2 - \lambda) < v.$$

On démontre de même que $|c, q_m| < v$ et on prend (p_m, q_m) pour le couple (p, q) ce qui achève la démonstration du Lemme B.3.

Nous aurons besoin, dans la suite, de quelques notations supplémentaires :

Dans A , on appelle couronne de centre $p \in D$ et de rayon $\ell(\theta)$ l'ensemble des points $(z, \theta) \in A$ tels que $|z, p(\theta)| = |z - p(\theta)| \leq \ell(\theta)$. On notera $C(p, \ell(\theta))$ une telle couronne ; si p et q appartiennent à D on notera :

$$W(p, q) = C(p, |\frac{p'(\theta), q(\theta)}{2}|) \cup C(q, |\frac{p'(\theta), q(\theta)}{2}|)$$

LEMME B.4.- (Quasi-homothétie des retours) :

Soit Γ une orbite cylindrique et récurrente de l'action Φ (on peut prendre Φ de classe $r > 2$ et non $r > 2$).

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta(\varepsilon)$ tel que pour tout $p \in D$ il existe un voisinage $V(p)$ de p dans A qui vérifie les conditions :

- i) $\forall q \in D$ tel que $q \cap V(p) \neq \emptyset$ alors $q \subset V(p)$.
- ii) $C(p, \eta(\varepsilon)) \subset V(p)$.
- iii) $\forall q$ et $q' \in D$ tels que $q \cap V(p) \neq \emptyset$ et $q' \cap V(p) \neq \emptyset$ et
 $\forall \theta, \theta' \in [0, 1]$ on a :

$$(1 - \varepsilon) \frac{|p(\theta'), q(\theta')|}{|p(\theta'), q'(\theta')|} \leq \frac{|p(\theta), q(\theta)|}{|p(\theta), q'(\theta)|} \leq (1 + \varepsilon) \frac{|p(\theta'), q(\theta')|}{|p(\theta'), q'(\theta')|}$$

Preuve du Lemme B.4.- Notons $a(\theta, z) = \frac{\partial \gamma}{\partial z}(\theta, z)$ où la fonction $\gamma(\theta, z)$ est celle définie dans le §A.

D'après les hypothèses sur Φ et Γ , $a(\theta, z)$ est au moins de classe C^1 sur $[0, 1] \times [-1, +1]$ et de plus $a(\theta, z) \neq 0$, car $\gamma(\theta, z)$ est un difféomorphisme, et enfin $a(\theta, z)$ garde un signe constant (Φ est orientable) que l'on peut supposer positif.

La compacité de l'ensemble de définition de γ permet d'écrire :

$$\left. \begin{array}{l} 0 < a_i \leq a(\theta, z) \leq a_s \\ \left| \frac{\partial a}{\partial z}(\theta, z) \right| \leq M \end{array} \right\} \text{ pour tout } (\theta, z) \in [0, 1] \times [-1, +1] .$$

et

En développant $\gamma(\theta, z)$ en z on obtient :

$$\gamma(\theta, z) - \gamma(\theta, z_0) = a(\theta, z) (z - z_0) + \frac{1}{2} \frac{\partial a}{\partial z}(\theta, z') (z - z_0)^2 \quad \text{pour un certain } z' \in [z, z_0] .$$

On choisit alors $\varepsilon_1(\varepsilon, a_i)$ tel que :

$$1 - \varepsilon/4 < \frac{a_i - \varepsilon_1}{a_i + \varepsilon_1} \leq 1 \quad \text{et} \quad \frac{a_i + \varepsilon_1}{a_i - \varepsilon_1} < 1 + \varepsilon/4$$

et on choisit η_1 tel que :

$$\frac{1}{2} M \eta_1 < \varepsilon_1 < a_i .$$

Il en résulte que pour $z \in [z_0 - \eta_1, z_0 + \eta_1]$ et pour tout $z_0 \in [-1, +1]$:

$$|\gamma(\theta, z) - \gamma(\theta, z_0) - a(\theta, z) (z - z_0)| < \varepsilon_1 (z - z_0)$$

Donc pour tout z_1 et tout z_2 dans $[z_0 - \eta_1, z_0 + \eta_1]$ et pour tout $z_0 \in [-1, +1]$ on a :

$$\frac{a_i - \varepsilon_1}{a_i + \varepsilon_1} \frac{(z_1 - z_0)}{(z_2 - z_0)} \leq \frac{\gamma(\theta, z_1) - \gamma(\theta, z_0)}{\gamma(\theta, z_2) - \gamma(\theta, z_0)} \leq \frac{a_i + \varepsilon_1}{a_i - \varepsilon_1} \frac{(z_1 - z_0)}{(z_2 - z_0)}$$

D'après le choix de ε_1 on peut encore écrire :

$$(1 - \varepsilon/4) \frac{(z_1 - z_0)}{(z_2 - z_0)} \leq \frac{\gamma(\theta, z_1) - \gamma(\theta, z_0)}{\gamma(\theta, z_2) - \gamma(\theta, z_0)} \leq (1 + \varepsilon/4) \frac{(z_1 - z_0)}{(z_2 - z_0)}$$

En écrivant l'inégalité ci-dessus pour une autre valeur quelconque θ' de θ et en comparant les deux inégalités on obtient :

$$(1 - \varepsilon) \frac{\gamma(\theta', z_1) - \gamma(\theta', z_0)}{\gamma(\theta', z_2) - \gamma(\theta', z_0)} \leq \frac{\gamma(\theta, z_1) - \gamma(\theta, z_0)}{\gamma(\theta, z_2) - \gamma(\theta, z_0)} \leq (1 + \varepsilon) \frac{\gamma(\theta', z_1) - \gamma(\theta', z_0)}{\gamma(\theta', z_2) - \gamma(\theta', z_0)}$$

Ce qui donne la conclusion iii) en notant, comme précédemment :

$$\begin{aligned} |p(\theta), q(\theta)| &= |\gamma(\theta, z_0) - \gamma(\theta, z_1)| \\ \text{et} & \qquad \qquad \qquad \text{pour } p \text{ et } q \in D. \\ |p(\theta), q'(\theta)| &= |\gamma(\theta, z_0) - \gamma(\theta, z_2)| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Par ailleurs on prend } V(p) = V(z_0) &= \bigcup \gamma(\theta, z) \\ &\theta \in [0, 1], \\ &z \in [z_0 - \eta_1(\varepsilon), z_0 + \eta_1(\varepsilon)]. \end{aligned}$$

$V(p)$ ainsi définie vérifie i) par hypothèse.

En remarquant que $\gamma(\theta, z)$ est uniformément continue, on obtient par ailleurs :

$$\begin{aligned} \exists \eta(\varepsilon) \text{ tel que} \\ \gamma^{-1}(\theta, z_0 \pm \eta(\varepsilon)) \subset \gamma^{-1}(\theta, z_0) \pm \eta_1(\varepsilon) \end{aligned}$$

pour tout $\theta \in [0, 1]$.

Ce choix de $\eta(\varepsilon)$ est indépendant de z_0 et il détermine une couronne de centre p contenue dans $V(z_0) = V(p)$ ce qui termine (par la conclusion ii)) la démonstration du Lemme B.4.

On associe maintenant les résultats des lemmes B.3. et B.4. pour obtenir le théorème suivant qui traduit essentiellement le fait que l'on peut toujours trouver deux retours p et q de telle sorte que tout retour intermédiaire (intervenant dans le "temps" entre p et q) se situe en dehors d'une couronne contenant à la fois p et q .

THEOREME B.5.- Soit Γ une orbite cylindrique récurrente de l'action Φ ; soit c le retour de A défini dans le §(A). Pour tout $v > 0$, il existe p et q appartenant à D tels que :

$$i) \quad |p, c| < v, \quad |p, q| < v, \quad p < q$$

$$ii) \quad \forall r \in D \text{ tel que } p < r < q, \text{ on a : } r \cap W(p, q) = \emptyset.$$

Démonstration du théorème B.5.: Soient $v > 0$, $\frac{1}{2} < \lambda < 1$, ε tel que $(1 - \varepsilon)\lambda > \frac{1}{2}$ et enfin $v_0 < \inf.(v, \frac{\eta(\varepsilon)}{2})$ ($\eta(\varepsilon)$ est celui définie dans le lemme B.4.).

Soient p et q ($p < q$) les deux retours déterminés dans le lemme B.3 pour les valeurs de v_0 et de λ choisies ici.

On peut écrire (B.3) : $|p, q| < \frac{\eta(\varepsilon)}{2}$. Soit alors un retour r tel que $p < r < q$ et considérons la valeur θ_0 de θ pour laquelle la distance de p à q est atteinte : $|p(\theta_0), q(\theta_0)| = \sup_{\theta \in [0, 1]} |p(\theta), q(\theta)| = |p, q|$, et la valeur θ_1 de θ pour laquelle la distance de p à r est atteinte :

$$|p(\theta_1), r(\theta_1)| = \sup_{\theta \in [0, 1]} |p(\theta), r(\theta)| = |p, r|.$$

D'après (B.3) on peut écrire :

$$|p(\theta_1), r(\theta_1)| > \lambda |p, q| = \lambda |p(\theta_0), q(\theta_0)| \geq \lambda |p(\theta_1), q(\theta_1)|$$

Donc :

$$\frac{|p(\theta_1), r(\theta_1)|}{|p(\theta_1), q(\theta_1)|} > \lambda > \frac{1}{2}$$

Ayant choisi ε tel que $(1 - \varepsilon)\lambda > \frac{1}{2}$, on doit avoir d'après (B.4) :

$$\frac{|p(\theta), r(\theta)|}{|p(\theta), q(\theta)|} > \frac{1}{2} \quad \text{pour tout } \theta \in [0, 1].$$

$$\frac{|q(\theta), r(\theta)|}{|p(\theta), q(\theta)|} > \frac{1}{2}$$

Ce qui donne bien, d'après la définition de $W_{(p, q)}$: $r \cap W(p, q) = \emptyset$.

(Ces deux inégalités entraînent que r est situé en dehors de l'union d'une couronne de centre p et de longueur strictement plus grande que $\frac{1}{2} |p, q|$ et d'une couronne de centre q et de longueur strictement plus grande que $\frac{1}{2} |p, q|$).

1.2.C.

THEOREME DE LINEARISATION. - Dans ce paragraphe nous partons de l'idée suivante : Après avoir choisi un certain nombre, fini, de retours notés $c, c_1, \dots, c_N$ on peut constater facilement que l'holonomie définit des difféomorphismes de voisinages du type couronne de c sur des voisinages du type couronne des c_i . Nous allons rendre ces difféomorphismes "localement linéaires" en perturbant légèrement l'action Φ dans une partie seulement du voisinage U (§I.2.A).

La nouvelle action sera donc égale à Φ sur $V - U$ et partout $\varepsilon - C^1$ - proche de Φ .

Si c est le retour de A défini dans (§A), on notera c_i le $i^{\text{ème}}$ retour à partir de c pour l'ordre $(<)$ également défini dans (§A). Les orbites du champ X définissent un difféomorphisme de c sur c_i :

$$(\theta, c(\theta)) \longmapsto (\varphi_i(\theta), c_i(\varphi_i(\theta)))$$

que l'on peut repérer uniquement par sa partie angulaire

$$\begin{aligned} \varphi_i : [0, 1] &\longrightarrow [0, 1] \quad (\text{mod. } 1) \\ \theta &\longmapsto \varphi_i(\theta) . \end{aligned}$$

Désignons par $k_i(\theta)$ l'arc d'orbite de X entre $(\theta, c(\theta))$ et $(\varphi_i(\theta), c_i(\varphi_i(\theta)))$.

Pour tout θ l'holonomie induit au-dessus de $k_i(\theta)$ un difféomorphisme local au voisinage de 0 entre R_θ et $R_{\varphi_i(\theta)}$:

$$z \longmapsto c_i(\varphi_i(\theta)) + \varphi_i^1(\theta, z) \quad \text{où} \quad \varphi_i^1(\theta, 0) = 0$$

Finalement, il existe une couronne V_0 de c dans A et une couronne V_i de c_i et un difféomorphisme de classe C^r de V_0 sur V_i noté $\Phi_i(\theta, z)$:

$$\Phi_i(\theta, z) = (\varphi_i(\theta), c_i(\varphi_i(\theta)) + \varphi_i^1(\theta, z)) ,$$

que l'on appellera difféomorphisme d'holonomie au voisinage du $i^{\text{ème}}$ retour.

Il est clair que $\Phi_i(\theta, z)$ est de classe C^r par rapport à la variable z .
 Pour vérifier que Φ_i est globalement de classe C^r notons que :

$$\Phi_i(\theta, z) = \gamma[\varphi_i(\theta), \gamma^{-1}(\Phi_i(0, \gamma^{-1}(\theta, z)))]$$

(où γ^{-1} est l'inverse de γ en z , la variable θ étant fixée), car les deux membres de l'égalité sont l'écriture des difféomorphismes locaux d'holonomie au-dessus de deux chemins γ homotopes entre eux. La différentiabilité de Φ_i résulte alors de celle de γ .

DEFINITION C.1.- On dira que le difféomorphisme $\Phi_i(\theta, z)$ est localement linéaire de V_0 dans V_i pour le système de coordonnées U si :

$$\varphi_i'(\theta, z) = a_i(\theta).z \quad \text{pour tout } (\theta, z) \in V_0$$

où $a_i(\theta)$ est périodique en θ . (En fait $a_i(\theta) = \frac{\partial \varphi_i'}{\partial z} \Big|_{(\theta, 0)}$).

Avec ces notations, le théorème de linéarisation s'énonce ainsi :

THEOREME C.2.- L'action Φ étant comme dans le théorème 2.1 (début du §I.2), pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout N , entier positif, il existe un difféomorphisme H de V sur lui-même, de classe C^{r-1} tel que :

- a) H est $\varepsilon - C^1$ -proche de Id_V
- b) $H = \text{Id}$ sur $(V - U) \cup c_i \times [-2, +2]$ $i = (1, \dots, N)$
- c) Il existe $L_0, \dots, L_N$ voisinages deux à deux disjoints de $c, c_1, \dots, c_N$ tels que l'action $H\Phi$ définie par $H\Phi(t, x) = H(\Phi(t, x))$ soit localement linéaire de L_0 dans L_i pour $i = (1, \dots, N)$.

La démonstration de ce théorème nécessite trois lemmes techniques que nous allons maintenant préciser :

LEMME C.3.- Soit $K(v) = [-v, +v]$ un interval fermé et $C(v) = K(v) \times [-2, +2]$ de coordonnées (x, t) , $x \in K(v)$ et $t \in [-2, +2]$. Soit $g : K(v) \rightarrow \mathbb{R}$ une application différentiable de classe C^r ($2 \leq r < \infty$) tel que :

$$g(0) = 0 \quad \frac{dg}{dx} \Big|_0 = 1 \quad \text{et} \quad \frac{dg}{dx} \neq 0 \quad \text{sur} \quad K(v);$$

Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe μ tel que $K(\mu) \subset K(v)$, et H une application de $C(v)$ dans $C(v)$ (où $H(x, t) = (G(x, t), t)$) tels que :

- H soit un difféomorphisme de classe C^r .
- $|H, \text{Id}_{C(v)}|_{C^1} < \varepsilon$
- $|H, \text{Id}_{\partial C(v)}|_{C^r} = 0$
- $G(x, t) = g(x)$ pour tout $(x, t) \in K(\mu) \times [-1, +1]$.

(i.e. : Si $(x, t) \in \partial C(v)$ on a : $H(x, t) = (x, t)$)

$$dH(x, t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^s H}{(\partial x \partial t)^s}(x, t) = 0 \quad (2 \leq s \leq r).$$

N.B. : si ℓ et k sont deux applications de classe C^r dans $C(v)$ on définit :

$$|\ell, k|_{C^1} = \sup_{m \in C(1)} \left\{ |\ell(m) - k(m)|, \left| \frac{\partial \ell}{\partial x}(m) - \frac{\partial k}{\partial x}(m) \right|, \left| \frac{\partial \ell}{\partial t}(m) - \frac{\partial k}{\partial t}(m) \right| \right\}$$

Démonstration du Lemme C.3. :

a) On construit une fonction φ de classe C^∞ de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$ telle que $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) = 1$ et $d^{(n)}\varphi(0) = d^{(n)}\varphi(1) = 0$ pour $n \geq 1$. On pose :

$$K = \sum_{s \leq r} \sup_{t \in [0, 1]} |\varphi^{(s)}(t)|.$$

Enfin pour $0 < t < 1$, $\varphi^s(t) > 0$.

ε étant choisi, on prend $0 < \mu \leq \mu_0$ tel que pour tout $m \in K(\mu_0)$, et donc tout $m \in K(\mu)$ on ait :

$$|g(m) - m| < \inf(\varepsilon/2K, \varepsilon) \quad \text{et} \quad \left| \frac{dg}{dx}(m) - 1 \right| < \inf(\varepsilon/2k, \varepsilon).$$

On définit alors G_0 , restriction de G à $K(\mu) \times [-2, +2]$ par :

$$G_0(x, t) = (1 - \varphi(t + 2))x + \varphi(t + 2)g(x) \quad \text{pour } (x, t) \in K(\mu) \times [-2, -1]$$

$$G_0(x, t) = g(x) \quad \text{pour } (x, t) \in K(\mu) \times [-1, +1]$$

$$G_0(x, t) = (1 - \varphi(2 - t))x + \varphi(2 - t)g(x) \quad \text{pour } (x, t) \in K(\mu) \times [1, 2].$$

Il est clair que H_0 ainsi défini ($H_0(x, t) = (G_0(x, t), t)$) est $\varepsilon - C^1$ -proche de $\text{Id}_{C(\mu)}$ et pour $t = \pm 2$ et $x \in K(\mu)$ on a : $|H, \text{Id}|_{C^2} = 0$.

b) On cherche à prolonger G_0 par une fonction $G_1(x, t)$ de classe C^r au moins définie sur $C(v) - C(\mu)$ et telle que :

- G_0 et G_1 coïncident, ainsi que leur dérivée première sur $\{x = \pm \mu\}$

- G_1 est $\varepsilon/2 - C^1$ -proche de $\text{Id}_{[C(v) - C(\mu)]}$

- G_1 coïncide à l'ordre 1 avec $\text{Id}|_{\partial C(v)}$ et à l'ordre r pour $t = \pm 2$.

On va définir G_1 dans $[\mu, v] \times [-2, +2]$ et G_1 sera définie de la même manière dans $[-v, -\mu] \times [-2, +2]$.

Posons $\alpha(t, \mu) = G_0(\mu, t)$, $\beta_1(t, \mu) = \frac{\partial G_0}{\partial x}(\mu, t), \dots, \beta_r(t, \mu) = \frac{\partial^r G_0}{\partial x^r}(\mu, t)$.

Les fonctions α et β_i sont C^∞ en t .

On cherche alors $\phi_1(x, t) = G_1(x, t) - x$ sous la forme d'un polynôme du 3ème degré en x , à coefficient dépendant de t et μ :

$$\phi_1(x, t, \mu) = a_3(\mu, t)x^3 + \dots + a_0(\mu, t)$$

avec les conditions sur a_0, a_1, a_2 et a_3 :

$$(1) \quad \begin{cases} \phi_1(\mu, t) = \alpha(t, \mu) - \mu & ; \quad \frac{\partial \phi_1}{\partial x}(\mu, t) = \beta_1(t, \mu) - 1 \\ \phi_1(v, t) = 0 & ; \quad \frac{\partial \phi_1}{\partial x}(v, t) = 0 \end{cases}$$

Posons $\ell(t, \mu) = (\alpha(t, \mu) - \mu, 0, \beta_1(t, \mu) - 1, 0)$ les conditions (1) s'écrivent : $A(\mu, v) (a_3, a_2, a_1, a_0) = \ell(t, \mu)$ où $A(\mu, v)$ est une matrice évidemment

inversible, d'où :

$$(2) \quad (a_3, a_2, a_1, a_0) = A^{-1}(\mu, \nu) \ell(t, \mu),$$

donc le vecteur $(a_3, a_2, a_1, a_0) = (a)$ est une fonction continue en (t, μ) et C^∞ en t .

Il est clair que :

$$(3) \quad (a) \text{ tend vers } 0 \text{ quand } \mu \text{ tend vers } 0 \text{ et ceci uniformément en } t.$$

Considérons $\phi_1(x, t, \mu)$ comme un polynôme en x défini sur $[0, \nu]$. On voit facilement que : pour que $|\phi_1(x)|$, $|\frac{\partial \phi_1}{\partial x}(x)|$ soient inférieurs à $\varepsilon/2$ sur $[0, \nu]$ il suffit que $|a(t, \mu)| = \sum_{i=0}^3 |a_i(t, \mu)|$ soit inférieur à $\eta(\varepsilon/2)$ pour un certain η et, en vertu de (3) il suffit pour cela que μ soit inférieur à un certain $\mu_1(\eta)$ et t quelconque.

En résumé :

$\exists \mu_1$ tel que, pour $\mu < \mu_1$, la fonction G_1 définie par $G_1(x, t) = x + \phi_1(t, x, \mu)$ vérifie les conditions imposées sauf peut-être la majoration de la dérivée $\frac{\partial G_1}{\partial t}$.

$$\text{Or : } \frac{\partial G_1}{\partial t} = \sum_{i=0}^3 \frac{\partial a_i}{\partial t} x^i$$

$$\text{et } \left(\frac{\partial a_i}{\partial t}\right) = A^{-1}(\mu, \nu) \left(\frac{\partial \alpha}{\partial t}, 0, \frac{\partial \beta_1}{\partial t}, 0\right)$$

Comme $\frac{\partial \alpha}{\partial t} = [g(\mu) - \mu] \varphi'(t)$ et $\frac{\partial \beta_1}{\partial t} = [g'(\mu) - 1] \varphi'(t)$, $\frac{\partial \alpha}{\partial t}$ et $\frac{\partial \beta_1}{\partial t}$ tendent vers 0 avec μ uniformément en t .

Il existe donc μ_2 tel que pour $0 < \mu < \mu_2$, $|\frac{\partial G_1}{\partial t}(t, \mu)| < \varepsilon/2$, et il suffit de prendre $0 < \mu < \inf(\mu_0, \mu_1, \mu_2)$ pour avoir :

$$H'(x, t) = (G_0(x, t), t) \quad \text{pour } (x, t) \in C(\mu)$$

$$H'(x, t) = (G_1(x, t), t) \quad \text{pour } (x, t) \in C(\nu) - C(\mu)$$

H' est un difféomorphisme de $C(\nu)$ sur $C(\nu)$ de classe C^1 ; $H'(x, t) = (G'(x, t), t)$ ainsi défini est tel que :

$$|H', Id|_{C^1} < \varepsilon/2 \quad \text{sur } C(v) \quad \text{et :}$$

- H' est de classe C^r partout sauf sur les segments ouverts $x = \pm \mu$.
- H' est égal à l'identité en valeur et en dérivées jusqu'à l'ordre r pour $t = \pm 2$ mais seulement à l'ordre 1 pour $x = \pm v$.
- Enfin, pour $x = \pm \mu$, les discontinuités des dérivées secondes et plus n'ont lieu que pour les dérivées du type $\frac{\partial^{s_1} G'}{\partial x^{s_1} \partial t^{s_2}}$ pour $s_1 \geq 2$ car H' est C^∞ par rapport à la variable t .

c) On cherche maintenant G sur $C(v) - C(\mu)$ de classe C^r et tel que :

$(G, G_1)|_{C^1} \leq \varepsilon/2$, et G est égal à l'ordre r à l'identité sur $\partial C(v) \cap (C(v) - C(\mu))$ et G est égal à l'ordre r à G_0 sur les segments $\{x = \pm \mu\}$.

D'une façon équivalente on peut chercher $F = G - G_1$ astreinte (dans le domaine $[\mu, v] \times [-2, +2]$ par exemple) aux conditions :

- F est $\varepsilon/2 - C^1$ proche de zéro.
- $\frac{\partial^s F}{\partial x^s}(\mu, t) = \beta_s(t) - \frac{\partial^s G_1}{\partial x^s}(\mu, t) = a_s(t)$
- $\frac{\partial^s F}{\partial x^s}(v, t) = - \frac{\partial^s G_1}{\partial x^s}(v, t) = b_s(t)$
- $F = 0$ et $dF = 0$ sur $\partial C(v) \cap ([\mu, v] \times [-2, +2])$.

Remarque : Par construction $a_s(t)$ et $b_s(t)$ sont des fonctions telles que :

$$\frac{d^{(n)} a_s}{dt^{(n)}}(-2) = \frac{d^{(n)} a_s}{dt^{(n)}}(2) = \frac{d^{(n)} b_s}{dt^{(n)}}(2) = \frac{d^{(n)} b_s}{dt^{(n)}}(-2) = 0 \quad \text{pour } n \geq 1.$$

Il en résultera, avec les conditions sur F , que $G = F + G_1$ complété par G_0 dans $[-\mu + \mu] \times [-2, +2]$ sera ε -proche de l'identité et sera égale à

l'identité à l'ordre r sur $\partial C(v)$ (les conditions de raccordement pour les dérivées rectangulaires $\frac{\partial^s}{\partial x^1 \partial t^2}$ résultent des conditions imposées sur les "dérivées carrées" $\frac{\partial^s}{\partial x^s}$)

$$\text{Posons } M_2 = \sup_{t \in [-2, +2]} \{a_2(t), b_2(t), \frac{da_2}{dt}, \frac{db_2}{dt}\}$$

On utilise alors le résultat suivant :

LEMME C.4.- Pour tout $\eta > 0$ et tout $s \geq 2$ il existe une fonction C^∞ φ_s de $[\mu, v]$ à valeur dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$\varphi_s(\mu) = \varphi_s^{(1)}(\mu) = \dots = \varphi_s^{(s-1)}(\mu) = 0, \quad \varphi_s^{(s)}(\mu) = 1.$$

$$\varphi_s^{(n)}(v) = 0 \quad \forall n \geq 0$$

$$\text{et } |\varphi_s(x)| < \eta, \quad |\varphi_s^1(x)| < \eta \quad \forall x \in [\mu, v].$$

Cela étant, on pose :

$$F_2(x, t) = a_2(t) \varphi_2(x) + b_2(t) \psi_2(x) \quad \text{où } \psi_2(x) = \varphi_2(\mu + v - x)$$

$$\text{et } \varphi_2 \text{ est telle que } |\varphi_2(x)| < \frac{\varepsilon}{4M_2(r-1)} \quad \text{et } |\varphi_2^{(1)}(x)| < \frac{\varepsilon}{4M_2(r-1)}.$$

Alors on peut écrire :

$$\left| \frac{\partial F_2}{\partial x}(x, t) \right| \leq \left| \frac{da_2}{dt}(t) \right| |\varphi_s(x)| + \left| \frac{db_2}{dt}(t) \right| |\psi_s(x)|$$

$$\leq 2M_2 \frac{\varepsilon}{4M_2(r-1)} = \frac{\varepsilon}{2(r-1)}$$

$$\left| \frac{\partial F_2}{\partial x}(x, t) \right| \leq \frac{\varepsilon}{2(r-1)}$$

Il est clair que F_2 et dF_2 sont nuls sur le bord de $[\mu, v] \times [-2, +2]$ et que

$\frac{\partial^2 F_2}{\partial x^2} = a_2(t)$ ou $b_2(t)$ pour $x = \mu$ ou v respectivement.

Enfin $\frac{\partial^2 F_2}{\partial t^2}$ et $\frac{\partial^2 F_2}{\partial x \partial t}$ sont nuls sur le bord de $[\mu, v] \times [-2, +2]$.

On pose : $\bar{a}_3(t) = a_3(t) - \frac{\partial^3 F_2}{\partial x^3}(\mu, t)$

$\bar{b}_3(t) = b_3(t) - \frac{\partial^3 F_2}{\partial x^3}(v, t)$

et on cherche $F_3(x, t)$, $\frac{\varepsilon}{4M_2(r-1)} - C^1$ - proche de zéro et telle que F_3 et dF_3 soient nuls sur le bord de $[\mu, v] \times [-2, +2]$ et $\frac{\partial^3 F_3}{\partial x^3}(\mu, t) = \bar{a}_3(t)$ etc.....

(Les conditions sont analogues à celles définissant F_2 mais à l'ordre 3). On construit ainsi de proche en proche $F_1, F_2, \dots, F_r$ et on pose : $F = F_1 + \dots + F_r$. Alors F est $\varepsilon/2 - C^1$ - proche de zéro et vérifie les conditions énoncées plus haut.

Pour que la démonstration du Lemme C.3. soit complète, nous donnons ici une démonstration du Lemme C.4.

Démonstration du Lemme C.4.: On peut supposer, après un changement de coordonnées, que $\mu = 0$ et $v = 1$. Soit $\bar{\lambda}$ une fonction C^∞ définie sur $[0, 1]$ et telle que $\bar{\lambda}^{(n)}(1) = 0$. (On peut, par exemple prendre $\bar{\lambda}(x) = e^{\frac{1}{x-1}}$). Supposons que $\bar{\lambda}(0) = 1$ et que $|\bar{\lambda}(x)| < K$, $|\bar{\lambda}^{(1)}(x)| < K$.

ε étant donné, soit $\lambda_s(x)$ une fonction C^∞ sur $[0, 1]$ telle que :

$\lambda_s(0) = 1$ $\lambda_s(1) = 0$ et $\lambda_s(x) \geq 0$, et de plus

$$\left| \int_0^1 \lambda_s(\tau) d\tau \right| \leq \varepsilon/2K$$

On pose $\lambda_{s=1}(x) = \int_0^x \lambda_s(\tau) d\tau$

d'où : $0 < \lambda_{s-1}(x) \leq \varepsilon/2K$ et ainsi de suite on définit par intégrations successives $\lambda_{s-2}, \dots, \lambda_1, \lambda_0 = \lambda$.

La fonction λ est telle que :

$$|\lambda(x)| \leq \varepsilon/2K, \quad |\lambda^{(1)}(x)| = |\lambda_1(x)| \leq \varepsilon/2K \quad \text{et}$$

$$\lambda(0) = \lambda^{(1)}(0) = \dots = \lambda^{(s-1)}(0) = 0 \quad \lambda^{(s)}(0) = 1.$$

Il suffit maintenant de poser $\varphi_s(x) = \bar{\lambda}(x) \lambda(x)$.

Alors : $|\varphi_s(x)| = |\bar{\lambda}(x)| |\lambda(x)| \leq \varepsilon/2 < \varepsilon$ et

$$|\varphi_s^{(1)}(x)| = |\bar{\lambda}^{(1)}(x)| |\lambda(x)| + |\bar{\lambda}(x)| |\lambda^{(1)}(x)| \leq 2 \frac{K\varepsilon}{2K} = \varepsilon$$

Enfin pour $0 \leq r < s$

$$\varphi_s^{(r)}(0) = \sum_{k=0}^r C_r^k \lambda^{(k)}(0) \bar{\lambda}^{(r-k)}(0)$$

et comme $\lambda^{(k)}(0) = 0$ pour $0 \leq k \leq r < s$ on a : $\varphi_s^{(r)}(0) = 0$. Par ailleurs $\varphi_s^{(n)}(1) = 0 \quad \forall n \geq 0$.

LEMME C.5.- Soit C le cercle de $\mathbb{R}^2$ de rayon ρ centré à l'origine. Pour les points au voisinage de C on introduit les coordonnées (θ, z) comme plus haut (§A). Soit $K_\rho(v) = C \times [-v, +v]$. En considérant $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$ on pose $C_\rho(v) = K_\rho(v) \times [-2, +2]$. $C_\rho(v)$ sera repéré par les coordonnées $x \in [-2, +2]$, $\theta \in [0, 1]$ et $z \in [-v, +v]$.

Soit $h(\theta, z) = (\theta, f(\theta, z))$ une application de $K_\rho(v)$ dans $C \times \mathbb{R}$, telle que :

- h soit de classe C^r , de rang 2 et injective ($r \geq 2$).

- $h|_C = \text{Id}_C$ et $dh|_C = \text{Id}$.

(c'est-à-dire : $h(\theta, 0) = (\theta, 0)$ et $dh|_C = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\partial h}{\partial \theta} \\ 0 & \frac{\partial h}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$)

Alors : Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\mu < \nu$ et $H(x, \theta, z) : C_p(\cdot) \rightarrow C_p(\nu)$ tels que :

1°) $H(x, \theta, z) = (x, F(x, \theta, z))$ est un difféomorphisme de classe C^r .

2°) $H = \text{Id}_C$ à l'ordre r pour les points de $\partial C_p(\nu)$.

3°) Si $C_p(\mu) = C \times [-\mu, +\mu] \times [-2, +2]$ et $K_p(\mu) = C \times [-\mu, +\mu]$

$$\left. \frac{H(x, \theta, z)}{K_p(\mu) \times [-1, +1]} \right|_{K_p(\mu) \times [-1, +1]} = h(\theta, z).$$

4°) $\|H, \text{Id}_{C_p(\nu)}\|_C \leq \varepsilon$.

Démonstration du Lemme C.5. : la démonstration est similaire à celle du lemme C.3. en tenant compte de la variation de θ sur le compact $[0, 1]$.

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le théorème C.2 (linéarisation).

Démonstration du théorème C.2. : Soit N un entier positif fixé. On peut supposer que les voisinages $V_0, V_1, \dots, V_N$ définis au début du §(I.2.C.) sont deux à deux disjoints.

Pour tout $i = (1, \dots, N)$ on a défini

$$\Phi_i(\theta, z) = (\varphi_i(\theta), c_i(\varphi_i(\theta)) + \varphi_i'(\theta, z))$$

comme les difféomorphismes locaux d'holonomie de V_0 sur V_i .

On pose $a_i(\theta) = \frac{\partial \varphi_i'}{\partial z}(\theta, z) \big|_{z=0}$.

Il est à noter que si l'action Φ est de classe C^r les φ_i' sont de classe C^r et les $a_i(\theta)$ de classe C^{r-1} .

Posons : $\bar{\Phi}_i(\theta, z) = (\varphi_i(\theta), c_i(\varphi_i(\theta)) + a_i(\theta)z)$ et considérons les applications de classe C^{r-1} :

$$h_i(\theta, z) : V_i \rightarrow A \quad h_i = \overline{\Phi}_i \circ \Phi_i^{-1} .$$

ε étant fixé, le lemme C.5 fournit un difféomorphisme de classe C^{r-1} , noté H_i , de $V_i \times [-2, +2] \rightarrow V_i \times [-2, +2]$ qui est $\varepsilon - C^1$ - proche de l'identité pour le système de coordonnées U . On définit un difféomorphisme global de V en posant :

$$\begin{aligned} H &= H_i \quad \text{sur } V_i \times [-2, +2] \\ H &= \text{Id} \quad \text{sur } V - \bigcup_{i=2}^N V_i \times [-2, +2] . \end{aligned}$$

D'après le lemme C.5 à chaque H_i est associé un voisinage V'_i de C_i , $V'_i \subset V_i$, tel que $H_i = h_i$ sur $V'_i \times [-1, +1]$. On choisit L_0 , un voisinage de c tel que :

$$L_0 \subset V_0 \cap \bigcup_{i=1}^N \Phi_i^{-1}(V'_i)$$

Si $\phi_i(\theta, z)$ est le difféomorphisme induit par l'holonomie au voisinage du $i^{\text{ème}}$ retour pour l'action $H\Phi$ il est clair que ϕ_i est défini sur L_0 . On pose $L_i = \phi_i(L_0)$. Alors, par construction, $\phi_i(\theta, z) = \overline{\Phi}_i(\theta, z)$ ce qui achève la démonstration.

Remarques :

C.6.- H étant un difféomorphisme de classe C^{r-1} , $H\Phi$ est une action de classe C^{r-1} de $\mathbb{R}^2$ dans V qui admet par $p \in c$ une orbite récurrente contenant c et dont les N "premiers retours" sur A sont $c_1, \dots, c_N$.

C.7.- Si X et Y sont des champs de vecteurs définissant Φ , $dH(X)$ et $dH(Y)$ sont deux champs commutant définissant l'action $H\Phi$.

De plus, X et Y étant fixés :

$H \rightarrow (dH(X), dH(Y))$ définit une application $\text{Diff}(V) \rightarrow (\mathfrak{X}^1(V) \times \mathfrak{X}^1(V))$ qui est continue, si l'on suppose $\text{Diff}(V)$ et $\mathfrak{X}^1(V)$ muni de leur C^1 -topologie.

I.2.D.

REPLIQUE LINEAIRE et "MINIMUM LIFT" [9] , [10] .- On suppose, dans ce paragraphe, que $\mathbb{R}^3$ est décrit par le système de coordonnées (x_1, x_2, x_3) et que le plan $x_1 = 0$ est décrit par les coordonnées polaires (ρ, θ) . On définit

$$C_r = \{(x_1, \rho, \theta) / x_1 = 0, \quad \rho = r > 1\} ;$$

r étant donné, on définit dans le plan $x_1 = 0$ sans le point $\{0\}$ la coordonnée $z = \rho - r$.

On obtient ainsi un système de coordonnées valable partout sauf à l'origine:

$$(z, \theta, x) \quad \text{où} \quad z > -r \quad \text{et} \quad \theta \in [0, 1] .$$

On note alors :

$$F_r = \{(z, \theta, x) \mid x = 0 \quad \text{et} \quad -1 \leq z \leq +1\} \quad (r > 1)$$

$$G_r = \{(z, \theta, x) \mid x \in [0, 1] \quad \text{et} \quad z \in [-1, +1]\}$$

Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ qui a pour support $[-1, +1] \times [0, 1]$ et telle que $f > 0$ dans l'intérieur de $[-1, +1] \times [0, 1]$ et enfin telle que $f < 1$, $\frac{\partial f}{\partial z} < 1$, $\frac{\partial f}{\partial x} < 1$. ($z \in [-1, +1]$, $x \in [0, 1]$).

On peut ainsi définir une fonction f_r de G_r à valeurs dans $\mathbb{R}$ avec

$$f_r(z, \theta, x) = f(z, x) .$$

Avec les notations du §(B) (définition d'une couronne) soit $S = C(r(\theta), b(\theta)) \times [0, 1]$ pour une fonction $b(\theta) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ avec $b(\theta) < r(\theta) \quad \forall \theta$.

DEFINITION D.1.- On appelle réplique linéaire de f sur S , la fonction f_S de S dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f_S(z, \theta, x) = b(\theta) \quad f\left(\frac{z-r(\theta)}{b(\theta)}, \theta, x\right) .$$

LEMME D.2.- ("Minimum Lift").- Pour tout $\varepsilon > 0$, soit $\phi(t,p)$ ($t \in [0,1]$ et $p \in S$) le flot du champ $(\varepsilon f_S, 0,1)$ (composante du champ suivant les coordonnées (z,θ,x)). On pose :

$$\underline{m(\theta)} = \min_{z \in [r(\theta) \pm \frac{b(\theta)}{2}]} [\Pi(\phi(1, (z,\theta,0))) - z]$$

Alors, il existe une constante $K(f_r)$ indépendante de r , telle que $m(\theta) \gg \varepsilon K.b(\theta)$.

[Π est la projection sur la coordonnée z].

Démonstration du Lemme D.2.- La variable θ étant fixée, la démonstration du Lemme 3.1 de [10] s'applique trivialement.

I.2.E.

Démonstration du théorème I.2.1. : La démonstration proprement dite du théorème 2.1. se fera en trois étapes. Nous commençons tout d'abord par linéariser localement l'action Φ sur un nombre fini, N , de retours. L'action ϕ ainsi déterminée étant repéré par rapport à deux champs de vecteurs (indépendants et qui commutent) X_1 et Y_1 nous approximerons d'une manière C^1 le champ X_1 par un champ X' dans la deuxième étape. Dans la troisième étape nous approximerons, toujours d'une manière C^1 le champ Y_1 par un champ Y' de telle façon que (X',Y') définissent un champ de 2-plans vérifiant les conclusions du théorème.

Pour définir plus précisément la notion de " C^1 - proche" sur l'ensemble des champs de 2-plans $(\mathfrak{X}^2(V))$ nous utiliserons le résultat suivant, (ayant choisi une C^1 -topologie sur $\mathfrak{X}^1(V)$ et une C^1 -topologie sur $\mathfrak{X}^2(V)$) :

LEMME E.1.- Soient X et Y appartenant à $\mathfrak{X}^1(V)$ deux champs linéairement indépendants. Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\eta(\varepsilon,X,Y)$ tel que, si $P(X,Y)$ est le champ de 2-plans engendré par X et Y et si X' et Y' sont tels que :

$$\frac{|X, X'|}{C_1} < \eta \text{ et } \frac{|Y, Y'|}{C_1} < \eta \quad (X', Y' \in \mathcal{X}^1(V))$$

on a :

1°) X' et Y' sont linéairement indépendants.

2°) Si $P(X', Y') \in \mathcal{X}^2(V)$ est le champ de 2-plans engendré par X' et Y' , $|P(X', Y'), P(X, Y)|_{C_1} < \varepsilon$.

$\alpha)$ Linéarisation locale de l'action Φ : soit Γ une orbite de l'action Φ définie comme dans les hypothèses du théorème 2.1.

Partant d'une telle action Φ , le théorème C.2. (linéarisation) nous permet de trouver une action ϕ qui soit la linéarisation locale de Φ pour N premiers retours (de Γ dans A). ϕ étant définie à partir d'un élément H de $\text{Diff}(V)$ notons $dH(X) = X_1$ et $dH(Y) = Y_1$ les deux champs de vecteurs sur V définissant l'action ϕ . D'après le théorème C.2. on peut choisir H de telle sorte que :

$$\frac{|X, X_1|}{C_1} < \eta/2$$

$$\frac{|Y, Y_1|}{C_1} < \eta/2$$

$\eta > 0$ dépendent ici de ε, X et Y .

Le champ Z orthogonal à (X, Y) est encore transversal à (X_1, Y_1) et de plus on a :

$X = X_1$ dans $V - L \cup R$ ($L \cup R$ est l'union de voisinages dans U définis dans le théorème C.2).

$$Y = Y_1 \text{ dans } V - U$$

Ici, nous allons prendre ϕ , la linéarisation locale de Φ pour les N premiers retours avec $N > \frac{2}{K\eta}$ où K est la constante définie dans le §(D) par rapport à une fonction f répondant aux critères définis dans le §(D).

Par construction du champ ϕ nous savons alors que les N premiers retours de Γ coïncident avec les N premiers retours de l'orbite par ϕ du retour "0" que

nous avons noté c , orbite qui est aussi cylindrique et récurrente.

β). C^1 - approximation du champ (linéarisé) X_1 : soient $c \in D$ et $0 < \nu < \inf(\frac{\eta}{2}, \frac{1}{2} |C, \partial L_0|)$ $L_0, L_1, \dots, L_N$ étant les voisinages de linéarisation disjoints définis dans le $\mathcal{J}(C)$. $(\psi_i(L_0) = L_i \quad i = (1, \dots, N))$.

Le Lemme B.3. appliqué à C pour $\lambda = \frac{1}{2}$ et ν défini plus haut nous montre l'existence de p et q appartenant à D qui vérifient :

$$\begin{aligned} |p, c| &< \nu \\ |q, c| &< \nu \end{aligned} \quad p < q$$

et $\forall r \in D$ tel que $p < r < q$ on a $r \cap W(p, q) = \emptyset$, (Théorème B.5). Cette dernière condition donnant, par ailleurs les inégalités :

$$|p, r| > \frac{1}{2} |p, q| \quad \text{et} \quad |q, r| > \frac{1}{2} |p, q|.$$

Les fonctions ψ_i étant définies pour $i = (1, \dots, N)$, notons $q_i = \psi_i(q)$, $p_i = \psi_i(p)$ et $b_i(\theta) = |p_i(\theta), q_i(\theta)|$.

Enfin, si l'on note $W_i = W(p_i, q_i)$ $i = (1, \dots, N)$, la linéarité de ψ_i et le fait que $W_0 \subset L_0$ (choix de ν) entraînent que $W_i = \psi_i(W_0)$ pour $i = (1, \dots, N)$.

Par ailleurs, dans

$$U = \{(z, \theta, x) \mid z \in [-1, +1], \theta \in [0, 1], x \in [-2, +2]\}$$

on prendra les notations suivantes :

$$S_i = \{(z, \theta, x) \in U \mid (z, \theta, 0) \in W_i, \quad x \in [0, 1]\}.$$

$$W'_i = \{(z, \theta, x) \in U \mid (z, \theta, 0) \in W_i, \quad x = 1\}.$$

Avec la définition de la fonction f_S prise dans le $\mathcal{J}D$, considérons la fonction suivante :

$$\Delta_i(z, \theta, x) = \begin{cases} \eta/2 f_{S_i}(z, \theta, x) \frac{\partial}{\partial z} & \text{si } q_i(\theta) < p_i(\theta) \\ -\eta/2 f_{S_i}(z, \theta, x) \frac{\partial}{\partial z} & \text{si } q_i(\theta) > p_i(\theta) \end{cases}$$

(Il faut évidemment noter que si il existe θ_0 tel que $q_i(\theta_0) < p_i(\theta_0)$ alors $q_i(\theta) < p_i(\theta)$, $\forall \theta$).

On peut ainsi remarquer que :

1°) la "direction" de Δ_i est celle qui va de q_i à p_i .

2°) $\text{Supp}(\Delta_i) = S_i$ par construction de Δ_i .

On peut choisir, initialement, $A \subset A_0$ de telle sorte que $\forall p \in D$, $|\frac{\partial p(\theta)}{\partial \theta}| < \frac{\eta}{5}$ (la métrique sur A étant celle définie au §(A) sur U_0 fixé une fois pour toutes). Ce choix est possible car, en considérant la fonction $\gamma(\theta, z)$ pour z fixé, on a : $p(0) = z$ et $p(\theta_0 + \delta\theta) = \gamma(\theta_0 + \delta\theta, z)$ donc

$$\left. \frac{\partial p(\theta)}{\partial \theta} \right|_{\theta_0} = \left. \frac{\partial \gamma}{\partial \theta} \right|_{(\theta_0, z)}$$

et on sait que $\left. \frac{\partial \gamma}{\partial \theta} \right|_{(\theta_0, 0)} = 0$.

On vérifie que $|\Delta_i|_C < \frac{1}{2} \eta$.

Pour $\sigma \in [0, 1]$, soit $\Delta^\sigma = \sigma \sum_{i=1}^N \Delta_i$. On vérifie que $|\Delta^\sigma|_C < \frac{1}{2} \eta$ et que $\text{Supp } \Delta^\sigma = \bigcup_{i=1}^N S_i$.

Nous allons montrer que pour une certaine valeur μ de la variable σ , le flot du champ $X_1 + \Delta^\mu = X'$ amène tous les points de q en tous les points de q , ce qui se traduit par le fait que l'orbite cylindrique déterminée par q et $X_1 + \Delta^\mu$ se referme en q (on obtient un tore).

Soit A' la "projection" de A sur $x = 1$ i.e.

$$A' = \{(z, \theta, 1) \mid (z, \theta, 0) \in A\} \quad , \text{ et}$$

notons Π_i la "projection" de W_i sur W'_i i.e. :

$$\text{si } (z, \theta, 0) \in W_i \quad , \quad \Pi_i(z, \theta, 0) = (z, \theta, 1) \quad .$$

Désignons, enfin, par $\delta_i(\sigma)$ le difféomorphisme de W_i sur W'_i défini par le flot du champ $X_1 + \Delta^\sigma$.

On définit par récurrence la fonction $\alpha_i(\sigma)$ de W_0 sur W_i :

$$\alpha_0(\sigma) = \text{Id}_{W_0}$$

$$\begin{aligned} \alpha_i(\sigma) &= \psi_i \psi_{i-1}^{-1} \Pi_{i-1}^{-1} \delta_{i-1}(\sigma) \alpha_{i-1}(\sigma) & \sigma \in [0, 1] \\ & & i = (1, \dots, N) \quad . \end{aligned}$$

Par ailleurs, on dira qu'un retour $d \in D$ est homothétique à deux-cercles, p et q si, et seulement si, il existe λ_d tel que :

$$\frac{|d(\theta) \cdot p(\theta)|}{|q(\theta) \cdot p(\theta)|} = \lambda_d \quad d(\theta) \quad , \quad \forall \theta \in [0, 1] \quad .$$

Il est clair que les applications $\alpha_i(\sigma)$ conservent la propriété d'être homothétiques (i.e. : l'image par $\alpha_i(\sigma)$ de d est homothétique aux cercles p_i , q_i) .

Pour finir, on prend les notations suivantes :

$$q_i(\theta, \sigma) = \alpha_i(\sigma)(q(\theta)) \quad (\text{en fait } q_i(\theta, \sigma) = (z, \theta, 0) \in W_i \text{ , la valeur de } \theta \text{ dans les deux membres étant la même}),$$

$$q'_i(\theta, \sigma) = \Pi_i(q_i(\theta, \sigma)) \quad , \quad (q'_i(\theta, \sigma) = (z, \theta, 1) \quad \text{si } (z, \theta, 0) = q_i(\theta, \sigma)) \quad .$$

$$\tilde{q}_i(\theta, \sigma) = \delta_i(\sigma) q_i(\theta, \sigma) \quad .$$

On a ainsi l'équation d'un cercle de type $q_i(\sigma)$ repéré par rapport à ses points $q_i(\sigma)(\theta) = q_i(\theta, \sigma)$.

La conservation de la propriété d'homothétie par $\alpha_i(\sigma)$ nous permet de raisonner

pour θ fixé.

On obtient l'une des deux possibilités suivantes :

$$a) \quad \tilde{q}_i(\sigma, \theta) \in [p_i'(\theta), q_i'(\theta)] \quad \forall i \in [0, N] \quad \text{et} \quad \forall \sigma \in [0, 1] .$$

$$b) \quad \exists \sigma \in [0, 1] \quad \text{et} \quad i \in [0, N] \quad \text{pour lesquels :}$$

$$p_i'(\theta) \in [q_i'(\theta), \tilde{q}_i(\sigma, \theta)] .$$

(N.B. : on note $p_i'(\theta) = \Pi_i(p_i(\theta))$.

Montrons que a) entraîne une contradiction ; en effet, si a) est vraie, comme $\alpha_i(\sigma)$ induit une linéarisation entre W_i' et W_{i+1} on peut écrire :

$$q_i(\sigma, \theta) \in [p_i(\theta), q_i(\theta)] \quad \forall i \in [0, N]$$

La linéarité de ϕ_i entre W_0 et W_i et la définition du "Minimum lift" pour la fonction f_{S_i} (Lemme D.2.) nous donne par ailleurs :

$$|\tilde{q}_i(\theta, \sigma), q_i'(\theta, \sigma)| \geq \frac{1}{2} \eta \sigma b_i(\theta) K \quad \forall i \in [0, N] .$$

La "direction" de Δ_i étant celle qui va de p_i à q_i et $\alpha_i(\sigma)$ induisant une linéarisation entre W_i' et W_{i+1} , on obtient alors :

$$\begin{aligned} \frac{|\tilde{q}_i(\theta, \sigma), q_i'(\theta)|}{b_i(\theta)} &= \frac{|\tilde{q}_i(\theta, \sigma), q_i'(\theta, \sigma)|}{b_i(\theta)} + \frac{|q_i'(\theta, \sigma), q_i'(\theta)|}{b_i(\theta)} \\ &= \frac{|\tilde{q}_i(\theta, \sigma), q_i'(\theta, \sigma)|}{b_i(\theta)} + \frac{|q_i(\theta, \sigma), q_i(\theta)|}{b_i(\theta)} \\ &= \frac{|\tilde{q}_i(\theta, \sigma), q_i'(\theta, \sigma)|}{b_i(\theta)} + \frac{|\tilde{q}_{i-1}(\theta, \sigma), q_{i-1}'(\theta)|}{b_{i-1}(\theta)} \end{aligned}$$

Cette dernière expression, d'après le $\S(D)$, est donc plus grande que :

$$\frac{1}{2} \eta \sigma K + \frac{|\tilde{q}_{i-1}(\theta, \sigma), q_{i-1}'(\theta)|}{b_{i-1}(\theta)} .$$

En itérant jusqu'à l'ordre N on obtient :

$$\frac{|\tilde{q}_N(\theta, \sigma), q_N'(\theta)|}{b_N(\theta)} \geq \frac{1}{2}(N+1)\sigma \eta K > \frac{1}{2} N \sigma \eta K \quad \forall \sigma \in [0,1] .$$

Avec notre choix de N , on aurait donc, pour $\sigma = 1$:

$$\frac{|\tilde{q}_N(\theta, 1), q_N'(\theta)|}{b_N(\theta)} > 1$$

ce qui est absurde puisque $\tilde{q}_N(\theta, 1)$ et $q_N'(\theta) \in W_N'$ qui a $b_N(\theta)$ comme "longueur" en chaque point θ .

Ainsi a) est faux pour un $i_0 \in [0, N]$ et un $\sigma_0 \in [0, 1]$.

En notant, à nouveau, que la "direction" de Δ_i va de p_i à q_i et que, en fait, $0 < \sigma \leq 1$, b est vraie pour $i = N$ et $\sigma = 1$.

Or $\tilde{q}_N(\theta, \sigma)$ est une fonction continue en σ donc il existe $\mu \in [0, 1]$ tel que $\tilde{q}_N(\theta, \mu) = p_N^1(\theta)$.

Comme l'action ϕ , linéarisation locale de Φ pour les N premiers retours, est de classe C^r ($r \geq 2$). On applique le théorème B.5 au "morceau" d'orbite de Γ allant de p_N' à q et qui donc ne rencontre pas les S_i .

Cette propriété et le résultat ci-dessus nous donnent ainsi l'approximation pour $X_1 + \Delta^\mu = X'$ de X_1 que l'on cherchait. Le cylindre engendré par les orbites de $X_1 + \Delta^\mu = X'$ passant par q se referme en q et on obtient un tore.

$\gamma)$ C^1 - approximation du champ linéarisé Y_1 : notons Γ_N la partie de l'orbite Γ comprise entre c et $c'_N = \Pi_N(c_N)$ où N et ε sont choisis comme dans les parties E. α et E. β .

Les orbites de X_1 issues de L_0 (voisinage de Linéarisation de c) définissent un voisinage tubulaire T de Γ_N (On se limite aux arcs d'orbites compris entre

L_0 et $L'_N = \Pi_N(L_N)$.

On a ainsi : $T \cap U = \bigcup_{i=1}^N L_i \times [-2, +2]$.

On peut donc étendre notre système de coordonnées sur U à un système $(\bar{x}, \bar{\theta}, \bar{z})$ défini sur $U_0 \times [-\alpha, +\alpha]$ en posant, pour un point $m = x_1(t, a)$ ($x_1(\cdot, \cdot)$ est le flot du champ X_1 et $a = (\theta, z, 0) \in U_0$) :

$$\text{coordonnées de } m \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{x} = t \\ \bar{\theta} = \theta \\ \bar{z} = z \end{array} \right\} \quad a$$

T apparaît ainsi comme une sous-variété de

$$S^1 \times I \times \mathbb{R} = \{(\bar{\theta}, \bar{z}, \bar{x}) / \bar{\theta} \in [0, 1], \bar{z} \in [-\mu, +\mu]\}$$

limitée par les sections dans $V : L_0 = \{(\bar{\theta}, \bar{z}, \bar{x}) / \bar{x} = 0\}$ et $L_N^\lambda = \{(\bar{\theta}, \bar{z}, \bar{x}) / \bar{x} = \varphi_N(\bar{\theta}, \bar{z})\}$.

En fait, chaque composante connexe de $T \cap U$, soit $L_i \times [-2, +2]$, $i = (1, \dots, N)$, est difféomorphe à $S^1 \times I \times I$, et on peut écrire ces difféomorphismes de la manière suivante :

$m \in L_i \times [-2, +2]$ de coordonnées $\bar{\theta}, \bar{z}, \bar{x}$ et de coordonnées (θ, z, x) dans

U

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\theta} = \theta_i(\theta, z, x) \\ \bar{z} = z_i(\theta, z, x) \\ \bar{x} = x + \varphi_i(\theta, z) \end{array} \right. \quad \text{avec} \quad \left\{ \begin{array}{l} \theta \in [0, 1] \\ z \in r(\theta) \pm b_i(\theta) \\ x \in [-2, +2] \end{array} \right.$$

pour $i = (1, \dots, N)$.

Enfin, et pour un choix initial convenable de A_0 , on ne restreint pas la généralité en supposant que :

$$T \subset T^0 = \{(\bar{\theta}, \bar{z}, \bar{x}) / x \in [0, \ell]\}.$$

On notera alors :

$$p_N'' = x_1(\ell)(p)$$

$$L_N'' = x_1(\ell)(L_0)$$

en utilisant les notations des parties précédentes. p_N'' est une orbite du champ Y_1 .

Ayant choisi une C^1 -topologie $\mathcal{C}$ sur $\mathcal{X}^1(V)$, pour qu'un champ $L \in \mathcal{X}^1(V)$ tel que $L = 0$ sur $V - T$ soit tel que $|L| < \eta$, il suffit que :

$$|L|_{C^1(T)} = \sup_{m \in T} (|L_\theta(m)|, |L_z(m)|, |L_x(m)|, |\frac{\partial L}{\partial \theta}(m)| \text{ etc...}) < \varepsilon_1(\eta).$$

Nous allons choisir W_0 et la perturbation Y' de Y_1 de telle sorte que :

$$1^\circ) Y' - Y_1 = 0 \quad \text{sur } V - T$$

$$2^\circ) |Y' - Y_1|_{C^1(T)} < \varepsilon_1(\eta).$$

Pour p et q choisis précisément, appelons $\Gamma'(p, q)$ l'orbite perturbée engendré par X' et prolongée par X_1 jusqu'en p_N'' et qui part donc de q :

$$\Gamma'(p, q) \cap L_0 = q \quad \Gamma'(p, q) \cap L_N'' = p_N''.$$

On peut repérer $\Gamma'(p, q)$ par une équation $\bar{z} = \gamma(\bar{\theta}, \bar{x})$ et il est clair que :

$$a) \quad \gamma(\bar{\theta}, 0) = q(\theta) \quad , \quad p_N'' \in \Gamma'(p, q)$$

$$b) \quad \forall m \in \Gamma'(p, q) \cap \left(\bigcup_{i=1}^N L_i \times [-1, +1] \right) , \quad \frac{\partial \gamma}{\partial \bar{x}}|_m = X'$$

$$c) \quad \text{En dehors de } \bigcup_{i=1}^N L_i \times [-1, +1] , \quad \gamma(\bar{\theta}, \bar{x}) \text{ est indépendant de } \bar{x} \text{ donc :}$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial \bar{x}} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \gamma}{\partial \bar{\theta}} = C^{\text{ste}}.$$

$$d) \quad \text{Enfin, sur les } L_i \times [-1, +1] , \text{ et par rapport aux variables } (\theta, z, x) \text{ on a :}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \gamma}{\partial x} = X' \\ \frac{\partial \gamma}{\partial \theta} = \frac{\partial p_i}{\partial \theta} \\ \frac{\partial \gamma}{\partial z} = \frac{\partial p_i}{\partial z} \end{cases}$$

Si p tend vers c et q tend vers c il est clair que $\gamma(\theta, x)$ tend vers 0 uniformément pour tout (θ, x) et de plus :

$$\frac{\partial \gamma}{\partial z}, \quad \frac{\partial \gamma}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial \gamma}{\partial x}$$

tendent vers 0 uniformément en (θ, z) , c'est-à-dire que pour tout $\varepsilon_2 > 0$, il existe ν tel que :

$$|p, c| < \nu \quad \text{et} \quad |q, c| < \nu$$

entraînent :

$$\gamma(\theta, x) < \varepsilon_2$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial z} < \varepsilon_2, \quad \frac{\partial \gamma}{\partial \theta} < \varepsilon_2, \quad \frac{\partial \gamma}{\partial x} < \varepsilon_2 \quad (1).$$

Pour tout m dans $\Gamma'(p, q)$ notons $T\Gamma'(p, q)(m)$ le plan tangent à $\Gamma'(p, q)$ au point m et Y' la projection orthogonale de Y_1 au point m sur le plan tangent $T\Gamma'(p, q)(m)$.

Il est clair que pour tout $\varepsilon_3 > 0$, il existe ε_2 tel que les conditions (1) entraînent :

$$|Y'(m) - Y_1(m)| < \varepsilon_3$$

et si l'on pose $Y_1(\bar{\theta}, \bar{x}) = Y_1(\gamma(\bar{\theta}, \bar{x}))$

$$Y'(\bar{\theta}, \bar{x}) = Y'(\gamma(\bar{\theta}, \bar{x}))$$

on aura, pour $i = \bar{\theta}, \bar{z}$ ou $\bar{x}$:

$$\left| \frac{\partial Y_{1i}(m)}{\partial \bar{\theta}} - \frac{\partial Y'_{1i}(m)}{\partial \bar{\theta}} \right| < \varepsilon_3$$

$$\left| \frac{\partial Y_{1i}(m)}{\partial \bar{x}} - \frac{\partial Y'_{1i}(m)}{\partial \bar{x}} \right| < \varepsilon_3$$

Soit φ une fonction C^∞ de $[-1, +1]$ sur $[0, 1]$ telle que :

a) $\varphi(t) = \varphi(-t)$

b) $\varphi(0) = 1$, $\varphi(1) = 0$

c) $\varphi'(0) = \varphi'(1) = 0$ et $\varphi'(t) > 0$ pour $t \neq 0, 1, -1$.

d) $|\varphi'(t)| < 2 \quad \forall t \in [-1, +1]$.

On prolonge Y' , déjà défini sur T , en posant, pour un point m de coordonnées $(\bar{\theta}, \bar{z}, \bar{x})$:

$$Y'(m) = Y_1(m) + \varphi\left(\frac{\bar{z} - \gamma(\bar{\theta}, \bar{x})}{\mu - \gamma(\bar{\theta}, \bar{x})}\right) (Y'(\bar{\theta}, \bar{x}) - Y_1(\bar{\theta}, \bar{x}))$$

pour m de coordonnées $(\bar{\theta}, \gamma(\bar{\theta}, \bar{x}), \bar{x})$ il vient immédiatement :

$$Y'(m) = Y'(\bar{\theta}, \bar{x}) \quad \text{et} :$$

$$Y'(\theta, \pm \mu, \bar{x}) = Y_1(\theta, \pm \mu, \bar{x})$$

$$\frac{\partial Y'}{\partial m}(\theta, \pm \mu, \bar{x}) = \frac{\partial Y_1}{\partial m}(\theta, \pm \mu, \bar{x})$$

Sur L_O et L_N'' : $Y'(m) = Y_1(m)$

et comme $Y'(\bar{\theta}, 0 \text{ ou } \ell) = Y_1(\bar{\theta}, 0 \text{ ou } \ell)$ on a :

$$\frac{\partial Y'}{\partial m} = \frac{\partial Y_1}{\partial m} \quad \forall m \in L_O \cup L_N'' ;$$

Donc en résumé : $|Y_1 - Y'|_{C^1(\partial T^0)} = 0 \quad (2) .$

On a :

$$\frac{\partial Y'}{\partial \bar{z}} - \frac{\partial Y_1}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{\mu - \gamma(\bar{\theta}, \bar{x})} \varphi' \left(\frac{z - \gamma(\bar{\theta}, \bar{x})}{\mu - \gamma(\bar{\theta}, \bar{x})} \right) (Y'(\bar{\theta}, \bar{x}) - Y_1(\bar{\theta}, \bar{x}))$$

D'où :

$$\left| \frac{\partial Y'}{\partial \bar{z}} - \frac{\partial Y_1}{\partial \bar{z}} \right| < \frac{2}{\mu - \varepsilon_2} \varepsilon_3$$

et par ailleurs :

$$\begin{aligned} \frac{\partial Y'}{\partial \bar{\theta}} - \frac{\partial Y_1}{\partial \bar{\theta}} &= \frac{\mu - \bar{z}}{(\gamma(\bar{\theta}, \bar{x}) - \mu)^2} \frac{\partial \gamma}{\partial \bar{\theta}} \varphi' \left(\frac{z - \gamma(\bar{\theta}, \bar{x})}{\mu - \gamma(\bar{\theta}, \bar{x})} \right) (Y'(\bar{\theta}, \bar{x}) - Y_1(\bar{\theta}, \bar{x})) \\ &+ \varphi \left(\frac{z - \gamma(\bar{\theta}, \bar{x})}{\mu - \gamma(\bar{\theta}, \bar{x})} \right) \left(\frac{\partial Y'}{\partial \bar{\theta}} - \frac{\partial Y_1}{\partial \bar{\theta}} \right) \end{aligned}$$

donc :

$$\left| \frac{\partial Y'}{\partial \bar{\theta}} - \frac{\partial Y_1}{\partial \bar{\theta}} \right| \leq \left(\frac{2\mu}{(\mu - \varepsilon_2)^2} \varepsilon_3 + 1 \right) \varepsilon_2$$

et

$$\left| \frac{\partial Y'}{\partial \bar{x}} - \frac{\partial Y_1}{\partial \bar{x}} \right| \leq \left(\frac{2\mu}{(\mu - \varepsilon_2)^2} \varepsilon_3 + 1 \right) \varepsilon_2$$

Il suffit donc de prendre ν suffisamment petit pour que :

$$\begin{aligned} \varepsilon_2 &< \inf \left(\mu, \frac{\varepsilon_1}{1 + 8/\mu} \right) \\ \varepsilon_3 &< \frac{\mu \varepsilon_1}{4} \end{aligned}$$

entraînent que $|Y' - Y_1|_{C^1(T^0)} < \varepsilon_1(\eta)$ et donc pour que Y' , prolongé maintenant dans toute la variété V par Y à l'extérieur de T^0 soit tel que (grâce à (2)) :

$$|Y' - Y_1|_{\mathcal{C}} < \eta \quad .$$

I.2.F.

CONCLUSION.- En se référant aux parties E. β et E. γ et une fois ε et N choisis, on prendra W_0 suffisamment petit pour que les conclusions des parties β et γ soient vérifiées simultanément. (On prend, bien entendu, le " η " de la partie β égal à $\eta/2$ défini dans le Lemme E.1).

Ainsi, et en vertu du Lemme E.1 , le champ de 2-plans défini par (X', Y') vérifie les conclusion du théorème I.2.1.

Partie II.

LES VARIETES FERMEES DE DIMENSION 3 ET DE RANG 2.

-::-::-

II.0.

INTRODUCTION ET GENERALITES.- (Les variétés considérées sont connexes).

DEFINITION 0.1.- Si V est une variété différentiable, le rang de V est égal au nombre maximum de champs de vecteurs, définis sur V , de classe C^2 , linéairement indépendants et qui commutent deux à deux.

Quand V est une variété fermée (i.e. : compacte et sans bord) le rang de V est égal au plus grand entier k tel qu'il existe une action non dégénérée (localement libre) de $\mathbb{R}^k$ sur V . (i.e. : les orbites de l'action sont de dimension k).

En particulier toutes les variétés sans bord de dimension 1 sont de rang un.

Parmi les variétés fermées de dimension 2 le tore T^2 est de rang deux, la bouteille de Klein de rang un et toutes les autres de rang nul.

En fait la seule variété fermée de dimension n qui soit de rang n est le tore T^n (qui est évidemment de rang n). En effet, si une variété de dimension n est de rang n , elle ne peut contenir qu'une seule orbite, de dimension n , la variété qui est elle-même. Cette orbite correspond au sous-groupe discret $\mathbb{Z}^n$ de $\mathbb{R}^n$ et elle est difféomorphe à $\mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$.

La bouteille de Klein est de rang 1 puisqu'elle peut être munie d'un champ de vecteurs sans singularité. Dans un article de E. Lima [5] on trouve d'ailleurs le résultat suivant : Une variété fermée M de dimension 2 n'admet une action de

$\mathbb{R}^2$ (action continue) sans singularités (points fixes) que si $\chi(M) = 0$ ($\chi(M)$ est la caractéristique d'Euler de la variété M).

Le résultat principal de la partie II est que les seules variétés de dimension 3 fermées orientables de rang 2 sont les fibrés non triviaux sur S^1 de fibre le tore T^2 .

Sachant que toutes les variétés fermées orientables de dimension 3 admettent des champs de vecteurs sans singularités, et que seul le tore T^3 (qui lui est un fibré trivial sur S^1 de fibre T^2) est de rang 3, ce résultat permet de connaître le rang de toutes les variétés fermées orientables de dimension 3.

Dans [6] E. Lima montre que le rang d'une variété simplement connexe de dimension 3 est un.

On en conclut facilement que si une variété fermée de dimension 3 a un groupe fondamental fini, elle est de rang un.

H. Rosenberg démontre dans [12], [14], que le rang de $S^2 \times S^1$ est un et que le rang d'une variété fermée simplement connexe de dimension n est inférieur à $n - 1$.

Par ailleurs, dans les travaux de S.P. Novikov sur les feuilletages on trouve que le rang d'une variété fermée V de dimension 3 est un si $\Pi_1(V) = 0$ ou $\Pi_2(V) \neq 0$ [8].

Enfin, H. Rosenberg et R. Roussarie ont montré que le rang d'une variété V , fermée, orientable et de dimension 3 est 1 si $H_1(V, \mathbb{Q}) = 0$, $\mathbb{Q}$ étant le corps des nombres rationnels.

La théorie des feuilletages intervient explicitement dans ce travail car les orbites d'une action non dégénérée de $\mathbb{R}^k$ sur une variété fermée V induisent un feuilletage de dimension k sur la variété. (Les orbites de l'action sont les

feuilles du feuilletage). Ainsi on peut rappeler que ces orbites sont homéomorphes à $\mathbb{R}^i \times T^j$, $i + j = k$, car les sous-groupes discrets de $\mathbb{R}^k$ (sous-groupes d'isotropie pour l'action) sont les $\mathbb{Z}^j$, $j \leq k$. En dimension 3 notamment, les orbites d'une action de $\mathbb{R}^2$ sont des orbites planes ($\mathbb{R}^2$), cylindriques ($\mathbb{R}^1 \times S^1$) ou toriques (T^2).

Si une variété fermée de dimension 3 est feuilletée par des plans $\mathbb{R}^2$ elle est homéomorphe au tore T^3 d'après un résultat de H. Rosenberg [15]. Nous nous intéresserons donc aux cas où l'action de $\mathbb{R}^2$ admet des orbites cylindriques ou (et) torique. Pour cela, certains résultats de Rosenberg et Roussarie dans [16] sont essentiels. Nous les citons ici et nous redonnerons les démonstrations de certaines d'entre-elles par la suite.

Soit V une variété compacte de dimension 3 munie d'un feuilletage orientable de codimension 1. Si le bord de V est non vide, nous supposons que les composantes connexes du bord sont des feuilles du feuilletage. D'autre part, le feuilletage est de classe C^r ($r \geq 2$).

DEFINITION 0.2. - Un feuilletage de Reeb sur V est un feuilletage où toutes les feuilles dans $\text{int}.V$ sont homéomorphes à $\mathbb{R}^2$ et où le bord est soit vide soit une union de tores T^2 .

THEOREME 0.3. [16] .- Si V admet un feuilletage de Reeb, alors V est difféomorphe à T^3 , $S^1 \times S^1 \times S^1$ ou à $D^2 \times S^1$ ou à $T^2 \times [0,1]$.

THEOREME 0.4. [16].- Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage de V par plans et tores. V est alors difféomorphe à l'une des variétés suivantes :

- i) La somme de deux tores solides, $D^2 \times S^1$, identifiés par un difféomorphisme défini sur les bords,
- ii) Un fibré sur S^1 de fibre T^2 ,

iii) $\underline{D^2 \times S^1}$,

iv) $\underline{T^2 \times [0,1]}$.

Pour terminer cette introduction nous donnons ici un bref résumé de la démonstration du résultat principal de la partie II : une variété fermée orientable de dimension 3 et de rang 2 est un fibré non-trivial sur S^1 de fibre T^2 .

Soit Φ une action non dégénérée de $\mathbb{R}^2$ sur une variété fermée V de dimension 3 . Les orbites de Φ sont $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R} \times S^1$ ou T^2 . Si toutes les orbites sont $\mathbb{R}^2$, V est feuilleté par des plans donc $V \approx T^3$ [15] . Puisque T^3 est de rang 3 Φ admet des orbites cylindriques et (ou) compactes, V étant de rang 2 . Si V n'a que des orbites cylindriques le théorème I.1.1. (Partie I) nous montre qu'on peut se ramener au cas où Φ a des orbites compactes (toriques). On sait par [16] que toutes les orbites compactes ne peuvent séparer V en deux composantes connexes. Ainsi, on peut trouver un entier k tel que si $T_1, \dots, T_k$ sont des orbites compactes telles que $V - \bigcup_{i=1}^k T_i$ est connexe, pour tout autre orbite compacte T , $T \cup T_1 \cup \dots \cup T_k$ sépare V en deux composantes connexes. (Cette propriété est considérée comme vraie même si, par exemple, les orbites $T_1, \dots, T_k$ sont les seules orbites compactes de Φ).

Soit W la variété obtenue en coupant la variété V le long des T_i ($i = (1, \dots, k)$). ∂W à $2k$ composantes connexes qui sont des tores, et toute orbite torique sépare W en deux composantes connexes.

Par un argument inductif nous montrons qu'on peut supposer que W n'a pas d'orbites compactes dans son intérieur, et nous prouvons ensuite que W est difféomorphe à $T^2 \times [0,1]$.

Ainsi V est obtenu en recollant les deux composantes du bord de W au-dessus d'un difféomorphisme du tore T^2 conservant l'orientation.

II.1.

Exemples : (Dans aucuns des exemples qui vont suivre, le feuilletage sur la variété V induit par l'action Φ de $\mathbb{R}^2$ ne comportera de composantes de Reeb (i.e. : une sous-variété de V homéomorphe à $D^2 \times S^1$, dont l'intérieur est feuilleté par des plans $\mathbb{R}^2$ et tel que $\partial(D^2 \times S^1)$ soit une feuille).

En effet, d'après un résultat de E. Lima [6] que nous utiliserons par la suite (dans la partie III notamment), il n'existe pas d'action de $\mathbb{R}^2$ sur $D^2 \times S^1$ telle que le bord soit une orbite et dont toutes les autres feuilles soient $\mathbb{R}^2$ (en fait nous montrerons qu'il n'existe pas d'action de $\mathbb{R}^2$ sur $D^2 \times S^1$, non dégénérée, et laissant le bord invariant).)

Considérons $T^3 = \mathbb{R}^3 / \mathbb{Z}^3$. Deux champs de vecteurs constants et linéairement indépendants dans $\mathbb{R}^3$ induisent, par passage au quotient, une action de $\mathbb{R}^2$ sur T^3 .

Par exemple $X = (1, 0, 0)$ et $Y = (0, 1, 0)$ induisent une action de $\mathbb{R}^2$ sur T^3 dont toutes les orbites sont compactes et homéomorphes à T^2 .

Soient α et β deux nombres réels rationnellement indépendants. Si $X = (1, 0, 0)$ et $Y = (0, 1, \beta)$, X et Y définissent une action de $\mathbb{R}^2$ sur T^3 dont toutes les orbites sont cylindriques $(\mathbb{R} \times S^1)$ et partout denses.

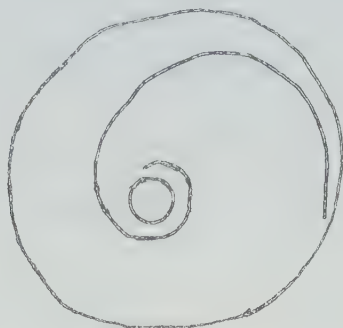
$X = (1, 0, \alpha)$ et $Y = (0, 1, \beta)$ définissent une action dont toutes orbites sont planes $(\mathbb{R}^2)$ et partout dense dans T^3 .

Soit $M = \{x_1, x_2, x_3 / |x_1^2 + x_2^2| < 2, 0 < x_3 < 1\}$ et soit M_1 l'espace quotient de M où l'on identifie les points $(x_1, x_2, 0)$ avec les points $(x_1, x_2, 1)$.

On introduit des coordonnées polaires (ρ, θ) dans M_1 pour les variables (x_1, x_2) : $1 < \rho < \sqrt{2}$, $\theta \in S^1$. On obtient T^3 en identifiant dans M_1 les

points $(0, 1, x_3)$ avec les points $(0, \sqrt{2}, x_3)$.

Considérons un champ de vecteurs X_0 défini sur l'anneau $x_3 = 0$, tangent au bord de cet anneau et dont les courbes intégrales, dans l'intérieur, spiralent d'une composante du bord de l'anneau vers l'autre. On suppose, de plus, que X_0 est invariant par les rotations de l'anneau [fig.1].



Soit X_1 le champs de vecteur défini dans M_1 par $X_1(x_1, x_2, x_3) = X_0(x_1, x_2)$ et définissons un champ Y_1 par $Y_1 = \frac{\partial}{\partial x_3}$.

On vérifie aisément que $[X_1, Y_1] = 0$.

Soit C un nombre irrationnel, algébriquement indépendant de Π , et soit φ une fonction C^∞ définie sur $[0, 1]$ telle que $\varphi(t) = 0$ pour $t \in [0, \frac{1}{4}]$ et $\varphi(t) = 1$ pour $t \in [\frac{3}{4}, 1]$.

Enfin, soit $h(\theta)$ la rotation d'angle θ de l'anneau $x_3 = 0$. On définit un difféomorphisme H de M sur M par :

$$H(x_1, x_2, x_3) = (h(\varphi(x_3)C)(x_1, x_2), x_3).$$

Il est alors facile de voir que les champs $X = dH(X_1)$ et $Y = dH(Y_1)$ définissent deux champs linéairement indépendants et qui commutent sur T^3 et qu'à ces deux champs on peut associer une action de $\mathbb{R}^2$ qui a une seule orbite compacte (le tore $\{(0, 1, x_3)\} = \{(0, \sqrt{2}, x_3)\}$) et dont toutes les autres orbites sont planes.

Il est possible de modifier ce dernier exemple et d'introduire une orbite cylindrique parmi les orbites planes.

Soit $\alpha(t)$ une fonction C^∞ définie sur $[1,2]$ telle que :

$$1^\circ) \quad \alpha(t) = \alpha(2) = 1$$

2°) α est C^∞ tangent à la droite $y = 1$ aux points 1 et 2 .

On définit alors un difféomorphisme T de l'anneau $x_3 = 0$, qui laisse fixe la direction radiale et qui envoie tout cercle $\rho = c^{\text{ste}}$ en un cercle $\rho = c^{\text{ste}}$ ($\rho^2 = x_1^2 + x_2^2$) en posant :

$$T(x_1, x_2) = (\alpha(x_1^2 + x_2^2)x_1, \alpha(x_1^2 + x_2^2)x_2) .$$

Il est clair que le difféomorphisme T se recolle C^∞ avec l'identité sur les bords de l'anneau $x_3 = 0$.

Soit γ un cercle dans l'anneau $x_3 = 0$ défini par $\rho = a$, $1 < a < \sqrt{2}$. Dans l'anneau bordé par γ et $T(\gamma)$ on définit un champ de vecteur X'_0 tangent aux bords γ et $T(\gamma)$ de cet anneau et dont les lignes intégrales, à l'intérieur, spiralent d'un bord vers l'autre (voir plus haut).

De plus, on suppose que X'_0 vérifie les conditions :

1°) X'_0 est invariant par rotation de l'anneau $x_3 = 0$.

2°) Les images de X'_0 par les itérés T^n de T pour $n \in \mathbb{Z}$ définissent un champ de vecteur, noté X'_0 , sur tout l'anneau $x_3 = 0$. Ce champ s'étend sur le bord de l'anneau $x_3 = 0$ de façon à être invariant par l'identification $(\theta, 1) = (\theta, \sqrt{2})$.

On procède maintenant comme dans l'exemple précédent en remplaçant $h(\theta)$ par $h(\theta)T$ et H par l'application

$$(x_1, x_2, x_3) \mapsto (h(\varphi(x_3))C)[(1 - \varphi(x_3))x_1 + \varphi(x_3)\alpha(\rho^2)x_1, (1 - \varphi(x_3))x_2 + \varphi(x_3)\alpha(\rho^2)x_2, x_3] .$$

Il est raisonnable de penser que l'exemple ci-dessus définit une action de classe C^∞ . En fait il n'en est rien et pour le voir il faut rapprocher cet exemple du résultat suivant, qui est dû à Nancy Kopell [4].

THEOREME [4].- Soient f et g des germes de difféomorphisme de classe C^2 de $\mathbb{R}^+ = \{x > 0\}$ qui commutent et tels que $f(0) = g(0) = 0$. Si f est une contraction (i.e. : $f(x) < x$ pour $x > 0$) et si $g \neq \text{id}$ alors 0 est le seul point fixe de g .

Or il est clair que, dans l'exemple précédent, l'holonomie du feuilletage calculée au-dessus de deux générateurs bien choisis de la feuille compacte $T^2 \times \{1\}$ de $T^2 \times I$ définit deux germes de difféomorphismes qui commutent, dont l'un est une contraction et dont l'autre a des points fixes autre que 0 ; d'après le théorème énoncé ci-dessus il ne sont certainement pas de classe C^2 et donc le feuilletage est de classe C^1 au plus.

Il serait intéressant d'avoir un exemple explicite d'un feuilletage de classe C^1 de $T^2 \times I$ tangent au bord et dont le feuilletage induit dans $\text{int}(T^2 \times I)$ soit composé de plans et de cylindres, et cela, pour les raisons suivantes :

Après des conversations avec G. Joubert et R. Moussu il est apparu que l'on peut améliorer le résultat de N. Kopell, énoncé plus haut, de la manière suivante : si le germe f est de classe C^2 et le germe g de classe C^1 le théorème reste encore vrai.

Ainsi, si l'on se propose de construire un exemple de feuilletage de classe C^1 de $T^2 \times I$, avec un mélange de feuilles planes et de feuilles cylindriques, en partant d'un feuilletage de l'anneau $S^1 \times I$ et d'un automorphisme de ce feuilletage (c'est de cette façon que l'on définit l'exemple plus haut) il est nécessaire que le feuilletage de $S^1 \times I$ et l'automorphisme soient tous les deux

de classe C^1 .

(l'automorphisme du feuilletage ne peut être de classe C^2) .

En outre, il est facile de construire une action de $\mathbb{R}^2$ sur $T^2 \times I$ définissant un feuilletage de classe C^0 (topologique) dont les seules feuilles compactes soient $T^2 \times \{0\}$ et $T^2 \times \{1\}$ et dont le feuilletage induit V dans $\text{int}(T^2 \times I)$ soit composé de feuilles planes et de feuilles cylindriques. (Par exemple on peut utiliser les translations du graphe de la fonction $y = \text{Arctg } x$ dans le plan pour obtenir un feuilletage de l'anneau $S^1 \times I$, défini par une action, dont $S^1 \times \{0\}$ et $S^1 \times \{1\}$ sont les seules feuilles compactes. On recolle ensuite sur $S^1 \times \{0\}$ et sur $S^1 \times \{1\}$ d'autres exemplaires du même feuilletage et on itère le procédé afin d'obtenir un feuilletage de $S^1 \times I$ dont les feuilles compactes s'accumulent sur $S^1 \times \{0\}$ et $S^1 \times \{1\}$ et tels qu'entre deux feuilles compactes les feuilles spiralent d'un bord vers l'autre. On peut facilement obtenir un automorphisme de ce feuilletage en prenant une fonction croissante, linéaire par morceau, et on réalise ainsi une action (topologique) de $\mathbb{R}^2$ sur $T^2 \times I$ ayant les propriétés voulues, en prenant le feuilletage produit sur $S^1 \times I \times I$ et en recollant au-dessus de l'automorphisme).

Enfin on peut noter (Moussu[27]) que si T est une feuille compacte d'une action Φ , isolée dans l'ensemble des feuilles compactes de l'action Φ , les feuilles, au voisinage de T sont toutes planes ou toutes cylindriques.

Supposons, maintenant que $f : T^2 \rightarrow T^2$ soit un difféomorphisme conservant l'orientation. On note $V = T^2 \times [0,1]/f$ la variété obtenue par passage au quotient sur $T^2 \times [0,1]$ par l'identification : $(x,1) \in T^2 \times \{1\}$ est identifié avec $(f(x),0) \in T^2 \times \{0\}$.

V est un fibré orientable sur S^1 de fibre T^2 et V est difféomorphe à T^3 si, et seulement si, f est isotope à l'identité. Les variétés obtenues

ainsi sont exactement celles de rang 2 (si f n'est pas isotope à l'identité).

Nous allons définir une action non dégénérée $\mathbb{R}^2$ sur V : On sait que si $f \in \text{Diff}^+(T^2)$ (difféomorphismes de T^2 conservant l'orientation) f est isotope à un difféomorphisme induit par un élément de $SL_2(\mathbb{Z})$ (matrices $(2,2)$ à coefficients dans $\mathbb{Z}$ et de déterminant ± 1). Plus précisément, f est isotope à un difféomorphisme linéaire F qui est induit par un élément de $SL_2(\mathbb{Z})$, et $V = T^2 \times [0,1]/f$ est difféomorphe à $V = T^2 \times [0,1]/F$.

Il existe une isotopie F_t telle que $F_0 = \text{identité}$ et $F_1 = F^{-1}$ et $F_t \in GL_2^+(\mathbb{R})$ (matrices de $GL_2(\mathbb{R})$ à déterminant positif) qui est un groupe connexe. On peut certainement choisir F_t de façon à ce que $F_t = F_0$ pour $0 \leq t < \varepsilon$ et $F_t = F_1$ pour $1 - \varepsilon < t \leq 1$ pour un certain $\varepsilon > 0$.

Pour chaque $t \in [0,1]$ on définit les deux champs $X(t) = F_t(1,0)$ et $Y(t) = F_t(0,1)$. $X(t)$ et $Y(t)$ définissent deux champs linéairement indépendants et qui commutent sur $T^2 \times \{t\}$. De plus on constate que $dF(X(1)) = (1,0) = -X(0)$ et $dF(Y(1)) = (0,1) = Y(0)$. Ainsi, par passage au quotient dans $V = T^2 \times [0,1]/F$, les deux champs définissent une action de $\mathbb{R}^2$ sur V , et le rang de V est 2 (la matrice représentant F est différente de l'élément neutre de $SL_2(\mathbb{Z})$).

II.1.

On peut toujours se ramener au cas où l'action Φ admet une orbite compacte au moins :

En effet, si toutes les orbites de l'action Φ de $\mathbb{R}^2$ sur V (fermée, orientable et de dimension 3) sont planes alors $V = T^3$ [15] ; dans le cas contraire, et si Φ n'admet aucune orbite compacte, le théorème I.1.1. (Partie I) nous montre qu'il existe une action Φ_1 ε -C¹-proche de Φ et telle que Φ_1 admette une orbite compacte au moins. Il faut quand même noter que ce que nous

avons eu vue dans cette partie sont les propriétés (à difféomorphisme près) de la variété V et non celles d'une action Φ , particulière, sur V ; c'est donc le fait que V puisse être munie d'une action Φ_1 ayant des orbites compactes qui est important, mais que cette action Φ_1 soit C^1 -proche de Φ est secondaire ici.

II.2.

LE LEMME FONDAMENTAL.- Dans ce paragraphe nous démontrons le lemme essentiel qui permet ensuite une démonstration assez simple du théorème principal :

LEMME 2.1.- (Lemme Fondamental).- Soit W une variété compacte, orientable, de dimension 3 dont le bord est l'union de k tores ($k \geq 2$) $T_1, T_2, \dots, T_k$. Soit Φ une action de $\mathbb{R}^2$ non dégénérée sur W , qui laisse le bord de W invariant et qui n'admet aucune orbite compacte dans l'intérieur de W . Alors W est difféomorphe à $T^2 \times [0,1]$.

Si toutes les orbites de Φ sont planes (dans $\text{int}(W)$) le résultat provient du théorème II.0.3, [16], [19], que nous avons énoncé dans l'introduction de cette Partie II.

Dans le cas où il existe une orbite cylindrique, nous allons montrer que les extrémités de cette orbite tendent, vers deux tores distincts du bord de W .

Rappelons que si Γ est une orbite cylindrique de l'action Φ , il existe deux champs de vecteurs sur W , X et Y , linéairement indépendants, qui commutent et qui définissent l'action Φ , et telles que toutes les orbites du champs X sont fermées (et de période 1) sur Γ (voir la Partie I).

Notons ϕ_s le flot du champ Y et considérons γ une orbite fermée, sur Γ , du champ X .

On définit alors :

$$\Gamma_t^+ = \overline{\bigcup_{s \geq t} \psi_s(\gamma)} \quad \text{et} \quad \Gamma_t^- = \overline{\bigcup_{s < t} \psi_s(\gamma)}$$

et on note :

$$\omega(\Gamma) = \bigcap_t \Gamma_t^+ \quad \text{et} \quad \alpha(\Gamma) = \bigcap_t \Gamma_t^-$$

Les ensembles $\omega(\Gamma)$ et $\alpha(\Gamma)$ s'appellent les ensembles ω -limite et α -limite, respectivement, de l'orbite Γ .

On voit facilement que $\omega(\Gamma)$ et $\alpha(\Gamma)$ sont invariants par l'action Φ , qu'ils sont fermés et non vides.

Nous supposerons avoir choisi sur W une métrique Riemannienne vérifiant les deux conditions suivantes :

1°) Pour tout tore T_i appartenant au bord de W il existe un voisinage collier U_i , difféomorphe à $T_i \times [0,1]$, de T_i tel que $T_i \approx T_i \times \{0\}$ et tel que pour tout $x \in T_i$, $\{x\} \times [0,1]$ soit une géodésique de longueur 1.

Notons $p_i : U_i \rightarrow T_i$ la projection le long des géodésiques ; la deuxième condition sera :

2°) Le feuilletage $\mathcal{F}$ de W associé à Φ est transverse aux segments $p_i^{-1}(x)$ pour tout $x \in T_i$.

Si C est une courbe fermée simple de T_i on note $A(C) = p_i^{-1}(C)$

LEMME 2.2. Soient W et Φ comme dans les hypothèses du lemme fondamental

(2.1) et Γ une orbite cylindrique de Φ avec les champs X et Y définis ci-dessus.

Alors, il existe i et j avec $i \neq j$ tel que $\omega(\Gamma) = T_i$ et $\alpha(\Gamma) = T_j$.
De plus, si $k = i$ ou j , il existe une courbe fermée simple, C , sur T_k et un voisinage V de C dans $A(C)$ tel que :

1°) $V \cap \Gamma$ est une union disjointe de courbes fermées simples $\{C_i\}$, appelés "retours" de Γ , et qui s'accumulent en C ,

2°) Si B_i désigne l'anneau dans V bordé par C et C_i , l'orientation de Y peut être choisie de telle sorte que les orbites ϕ_t de Y vont de C_i à C_{i+1} , pour chaque i , quand $t \rightarrow +\infty$, et $B_{i+1} \subset B_i$ pour tout i .

Démonstration du Lemme 2.2. : $\omega(\Gamma)$ est un ensemble Φ -invariant, fermé et non vide donc $\omega(\Gamma)$ contient un ensemble Φ -minimal M (voir Partie I).

Soit $\bar{W}$ le double de la variété W et $\bar{\Phi}$ l'action de $\mathbb{R}^2$ sur $\bar{W}$ qui est égale à l'action Φ sur chacune des copies de $\bar{W}$. M est encore un ensemble $\bar{\Phi}$ -minimal et $M \neq \bar{W}$. On peut alors appliquer un théorème de Sacksteder sur $\bar{W}$ pour conclure que M est une feuille compacte [22].

Il est alors clair que M est une orbite compacte de l'action Φ donc il existe un indice i tel que $M = T_i$.

Soit (p_j) une suite de points de Γ convergent vers un point p de T_i . Chacun des orbites de X en p_j est fermée et de période 1 donc l'orbite C de X en p est fermée.

Notons C_j l'orbite de X passant par p_j . Nous pouvons choisir, comme c'est d'ailleurs fait dans [16], un voisinage S de C dans W et tel que

$V = S \cap A(C)$ vérifie les conditions 1°) et 2°) du Lemme 2.2.

Tout d'abord, cela implique clairement que $\omega(\Gamma) = T_i$ (pour k assez grand, les "morceaux" de l'orbite Γ allant de C_k à C_{k+1} , pour un temps croissant, tendent vers T_i).

Par ailleurs on a aussi que $\alpha(\Gamma) = T_j$ (en faisant le même raisonnement sur $\alpha(\Gamma)$ que sur $\omega(\Gamma)$) et surtout que $i \neq j$. En effet, si k est suffisamment grand le "morceau" de Γ pris entre C_k et C_{k+1} est contenu dans U_i , donc l'union de ce cylindre sur Γ bordé par C_k et C_{k+1} et de l'anneau sur V bordé par C_k et C_{k+1} est un tore topologique séparant W en deux composantes connexes. Pour aller vers T_i , les orbites du champ Y sont obligés de couper l'anneau sur V bordé par C_k et C_{k+1} . Mais l'orientation du champ Y a été choisi de telle sorte que les orbites de ce champ traversent l'anneau sur V compris entre C_k et C_{k+1} pour un temps croissant. Cela implique certainement que $\alpha(\Gamma) \cap T_i = \emptyset$ et donc que $\alpha(\Gamma) = T_j$ et $j \neq i$.

Le lemme suivant a été démontré par E. Lima dans [6].

LEMME 2.3.- Soit Φ une action non dégénérée sur une variété V compacte et de dimension 3. Si T est une orbite torique de Φ contenu dans le bord de V , l'inclusion $i : T \hookrightarrow V$ induit une injection $i_* : \pi_1(T) \rightarrow \pi_1(V)$.

Soit alors W et Φ comme dans les hypothèses du lemme fondamental (2.1); considérons une composante T_i dans ∂W et soient $X, Y, A(C)$ et (B_j) comme dans le lemme 2.2.

Si S est un sous-ensemble de U_i on définit $d(T_i, S) = \sup\{d(x, y) \mid x \in T_i, y \in S \text{ et } x \text{ et } y \text{ appartiennent à la même géodésique, normale à } T_i\}$.

LEMME 2.4. - Si T_i est dans un ensemble limite d'une orbite cylindrique Γ et $\varepsilon > 0$, il existe un tore T'_i plongé dans U_i qui vérifie les conditions :

1°) T_i et T'_i bordent une sous-variété de W difféomorphe à $T^2 \times [0,1]$,
et $d(T_i, T'_i) < \varepsilon$,

2°) Le champ de vecteurs Y est transverse au tore T'_i ; ainsi T'_i est transverse au feuilletage $\mathcal{F}$ associé à Φ .

Démonstration du lemme 2.4. :

Prenons j suffisamment grand pour que le cylindre, dans Γ , bordé par C_j, C_{j+1} soit à une distance inférieure à $\varepsilon/2$ de T_i . Notons Γ_j ce cylindre

Désignons par E_j l'anneau, dans $A(C)$, bordé par C_j et C_{j+1} et par $T(j)$ le tore topologique $E_j \cup \Gamma_j$.

Pour démontrer le lemme 2.4 il suffit de modifier convenablement le tore $T(j)$.

Soit M un voisinage tubulaire [dans U_i] de Γ_j , homéomorphe à $S^1 \times I \times J$ ($I = J = [0,1]$) et paramétré par $\theta \in S^1$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $z \in I$, $0 \leq z \leq 1$ et $x \in J$, $0 \leq x \leq 1$. On peut remarquer que :

a) $S^1 \times \{0\} \times J = \Gamma_j$.

b) $S^1 \times I \times \{0\} \in A(C)$, $S^1 \times I \times \{1\} \in A(C)$

c) Les orbites de Y dans M sont les (θ_0, z_0, J) .

Soit $M(\theta_0)$ le rectangle $\{(\theta, z, x) / \theta = \theta_0\}$. La trace du tore T'_i , que nous cherchons, dans $M(\theta_0)$ sera celle indiquée dans la figure ci-dessous ;
(fig.1).

Elle est transverse en tous points à Y et elle est tangente aux côtés "verticaux" de $M(\theta_0)$.

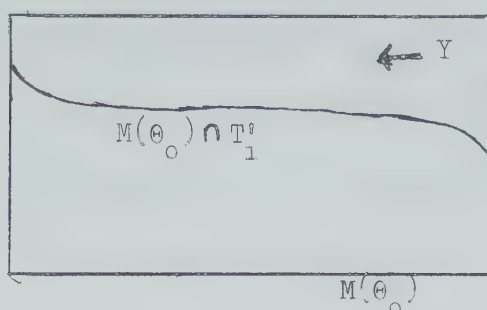


Figure 1.

T_1^0 sera le tore (différentiable d'après la figure) construit en prenant l'union des traces ainsi définies dans chaque $M(\theta)$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, et de l'anneau de $A(C)$ bordé par $S^1 \times I \times \{0\}$ et $S^1 \times I \times \{1\}$. Le tore T_1^0 ainsi construit satisfait clairement aux conditions 1°) et 2°) du lemme 2.4.

Nous allons maintenant faire une construction du même type pour chacun des tores du bord de W qui sont dans un ensemble limite d'une orbite cylindrique de telle sorte que des conclusions du type 1°) et 2°) du lemme 2.4 soient simultanément vérifiées par tous les tores T_i^0 construits.

Nous commençons par indexer les tores $T_1, \dots, T_k$ de ∂W de façon à ce que $T_1, \dots, T_n$ soient dans des ensembles limites d'orbites cylindriques et $T_{n+1}, \dots, T_k$ les composantes restantes. Remarquons que dans le cas où $n = 0$, et d'après le lemme 2.2, toutes les orbites de Φ dans $\text{int}(W)$ sont planes et le problème est résolu : $W \approx T^2 \times [0, 1]$ [16].

On suppose que $n \geq 1$.

LEMME 2.5.- Il existe deux champs de vecteurs X et Y dans W , qui définissent l'action Φ (W et Φ sont comme dans les hypothèses du lemme fonda-

mental (2.1)) tels que les tores T_j^0 , $1 \leq j \leq n$, construits dans le lemme 2.4 satisfont aux conditions :

- 1°) Les cobordismes triviaux entre les T_j , T_j^0 sont deux à deux disjoints.
- 2°) Le champ de vecteur Y est transverse à chaque tore T_j^0 .
- 3°) Chaque courbe intégrale de Y rencontre chaque tore T_j^0 en au plus un point et rencontre $\bigcup_{j=1}^n T_j^0$ en deux points au plus.

Démonstration du lemme 2.5. : Remarquons tout d'abord que la condition 3°) résulte trivialement des conditions 1°) et 2°) .

Pour chaque tore T_j , $1 \leq j \leq n$, choisissons une orbite cylindrique L_j qui contient T_j dans son ensemble limite. Soient $Zu_1, \dots, Zu_n$ les sous-groupes d'isotropie des $L_1, \dots, L_n$ où $u_1, \dots, u_n$ sont des vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^2$. A un vecteur $u \in \mathbb{R}^2$ distinct de 0 et non contenu dans les $\mathbb{R}u_1, \dots, \mathbb{R}u_n$, correspond un champ de vecteur Y défini dans W par $\frac{\partial}{\partial t} \Phi(0, p)(u)$ (voir Partie I). Les courbes intégrales de Y sur $L_1, \dots, L_n$ sont homéomorphes à $\mathbb{R}$.

Pour chaque $1 \leq j \leq n$ on construit, comme dans le lemme 2.4 un tore T_j^0 en utilisant le champ Y et un champ X_j correspondant au vecteur u_j .

Pour finir, on choisit n'importe quel champ X , linéairement indépendant de Y et qui commute avec Y et qui définit avec Y l'action Φ . (Le choix de X , pour la suite n'importe pas). X, Y et $T_1^0, \dots, T_j^0$ satisfont alors aux conditions 1°), 2°) et 3°) du lemme 2.5.

LEMME 2.6. - Considérons un des tores T_j^0 définis dans le lemme 2.5. Soit S est une orbite de Φ et C une courbe fermée simple de $L \cap T_j^0$ (il peut ne pas exister). Alors C n'est pas homotope à zéro ni dans L ni dans T_j^0 .

Démonstration du lemme 2.6. : Si C n'est pas un générateur de $\Pi_1(T_i^0)$, C borde un disque dans T_i^0 . Mais le feuilletage $\mathcal{F}$ associé à Φ induit un feuilletage sur T_i^0 pour lequel C est une feuille et puisque C borde un disque dans T_i^0 ce feuilletage admet au moins une singularité à l'intérieur de ce disque ce qui est impossible car, par construction, T_i^0 est transverse à $\mathcal{F}$.

Ainsi C est un générateur de $\Pi_1(T_i^0)$.

Si C était homotope à zéro dans L , il le serait évidemment dans W et l'inclusion $i : T_i^0 \hookrightarrow W$ induirait un morphisme $i_* : \Pi_1(T_i^0) \rightarrow \Pi_1(W)$ qui aurait la classe de C dans son noyau. Ceci est impossible car, d'après le lemme 2.3, le morphisme $i_* : \Pi_1(T_i^0) \rightarrow \Pi_1(W)$ est injectif et si C est un générateur de $\Pi_1(T_i^0)$ il lui correspond certainement un générateur de $\Pi_1(T_i^0)$, T_i^0 et T_i^0 bordant un cobordisme trivial dans W .

LEMME 2.7.- Soit T_i^0 comme dans le lemme 2.6. Si L est une orbite de Φ telle que $T_i^0 \cap L \neq \emptyset$, alors $T_i^0 \cap L$ est homéomorphe à S^1 ou à $\mathbb{R}$. En fait $T_i^0 \cap L$ est homéomorphe à S^1 si et seulement si, L est une feuille cylindrique $(S^1 \times \mathbb{R})$ et $T_i^0 \cap L$ est homéomorphe à $\mathbb{R}$ si et seulement si, L est une feuille plane $(\mathbb{R}^2)$.

De plus, si ϕ_t désigne le flot du champ Y , on a :

$$\bigcup_{t \in \mathbb{R}} \phi_t(T_i^0 \cap L) = L.$$

Démonstration du lemme 2.7. : Le feuilletage $\mathcal{F}$, associé à Φ , étant transverse à T_i^0 , $L \cap T_i^0$ est l'union de copies de $\mathbb{R}$ et de S^1 .

Soit γ une composante connexe de $L \cap T_i^0$.

Remarquons d'une part que l'angle entre Y et γ est borné inférieurement puisque Y est transverse à T_1^0 qui est compacte, et d'autre part que T_1^0 sépare W en deux composantes connexes, ce qui nous permet de voir que pour chaque $p \in \gamma$, l'orbite de Y en p rencontre T_1^0 en p seulement.

Soit (u,v) un système de coordonnées de $\mathbb{R}^2$ tel que $\Phi(\frac{\partial}{\partial u}) = X$ et $\Phi(\frac{\partial}{\partial v}) = Y$. Pour un point $p \in \gamma$ l'application $\Phi(u,v; p)$ de $\mathbb{R}^2$ dans W à L comme image.

Soit $\tilde{\gamma}$ une composante connexe de $\Phi^{-1}(\gamma)$. $\tilde{\gamma}$ est une courbe différentiable dans $\mathbb{R}^2$. Si $\tilde{\gamma}$ était une courbe fermée, $\tilde{\gamma}$ serait le bord d'un disque dans $\mathbb{R}^2$ et le champ $\frac{\partial}{\partial v}$ de $\mathbb{R}^2$, qui est transverse à $\tilde{\gamma}$ parce que le champ Y est transverse à γ , aurait une singularité au moins dans l'intérieur de ce disque, ce qui est absurde. Donc $\tilde{\gamma}$ est difféomorphe à $\mathbb{R}$.

Par ailleurs, chaque orbite de Y rencontre γ en un point au plus, donc chaque orbite de $\frac{\partial}{\partial v}$ rencontre $\tilde{\gamma}$ en un point au plus. Ainsi $\tilde{\gamma}$ est le graphe d'une fonction $v = f(u)$ définie sur un interval (a,b) de l'axe u de $\mathbb{R}^2$.

Nous allons montrer que $a = -\infty$ et $b = +\infty$. Supposons, au contraire, que $b < +\infty$ et soit $a \in (a,b)$.

$|f|$ n'est alors pas bornée sur $[c,b]$ sinon le graphe de f (qui est $\tilde{\gamma}$) ne serait pas une sous-variété fermée de $\mathbb{R}^2$.

D'après le théorème de la valeur moyenne $|f'|$ n'est pas bornée non plus sur $[c,b)$ et donc il existe une suite (δ_i) qui converge vers 0, et une suite (x_i) de points de $[c,b)$ telles que :

$$f'(x_i) = \frac{1}{\delta_i} \quad (1)$$

Considérons maintenant, et pour une valeur quelconque de δ , le champ de vecteurs $\delta(\frac{\partial}{\partial u}) + \frac{\partial}{\partial v}$ dans $\mathbb{R}^2$ et le champ

$$Y(\delta) = \Phi \left(\delta \left(\frac{\partial}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \right)$$

dans W .

Pour toutes les valeurs de δ , X et $Y(\delta)$ définissent l'action Φ et, de plus, $Y(0) = Y$.

Puisque Y est transverse à T'_i , il existe $M > 0$ tel que $Y(\delta)$ soit transverse à T'_i pour $|\delta| < M$.

Ainsi $\delta(\frac{\partial}{\partial u}) + \frac{\partial}{\partial v}$ est transverse à $\tilde{\gamma}$ si $|\delta| < M$ ce qui contredit (1). En effet $\delta_i(\frac{\partial}{\partial u}) + \frac{\partial}{\partial v}$ est tangent à $\tilde{\gamma}$ au point $(x_i, f(x_i))$ pour tout i .

Finalement f est défini sur tout l'axe u et $L = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} \phi_t(\gamma)$ puisque chaque ligne intégrale de $\frac{\partial}{\partial v}$ rencontre, en fait, $\tilde{\gamma}$ en un point (et un seul).

(On voit notamment que $\Phi^{-1}(\gamma) = \tilde{\gamma}$).

L'application $\gamma \times \mathbb{R} \rightarrow L$ défini par :

$$(x, t) \mapsto \phi_t(x)$$

est donc un homéomorphisme et il est clair que L est homéomorphe à $\mathbb{R}^2$ si, et seulement si, γ est homéomorphe à $\mathbb{R}$ et L est homéomorphe à $S^1 \times \mathbb{R}$ si, et seulement si, γ est homéomorphe à S^1 ce qui achève la démonstration du Lemme 2.7.

Nous allons maintenant montrer que toutes les orbites de Φ quittant un des tores $T'_1, \dots, T'_n$ en rencontrent obligatoirement un autre (pour un temps croissant ou décroissant) ce qui termine la série de lemmes permettant de démontrer le lemme

fondamental (2.1.).

LEMME 2.8.- Soit T'_i un des tores $T'_1, \dots, T'_n$ et soit p un point de T'_i . Alors l'orbite de Φ passant par p rencontre un tore T'_j , $j \neq i$, et ce dépend pas du choix de $p \in T'_i$.

Démonstration du lemme 2.8. : Pour tout $j \neq i$, $1 \leq j \leq n$, on définit $V_j \subset T'_i$ comme l'ensemble des points de T'_i dont l'orbite par Y coupe T'_j . Par continuité de Y on peut remarquer que V_j est ouvert dans T'_i et de plus si $j_1 \neq j_2$ on sait, par le lemme 2.5, que $V_{j_1} \cap V_{j_2} = \emptyset$. T'_i étant connexe, pour démontrer le lemme 2.8 il suffira de montrer que $T'_i = \bigcup_j V_j$.

Si $\mathcal{F}$ est le feuilletage de W associé à Φ , notons G le feuilletage de dimension 1 induit par $\mathcal{F}$ sur T'_i .

T'_i étant transverse à $\mathcal{F}$, G est un feuilletage sans singularité, et W étant orientable, il existe un champ Z défini sur T'_i et tangent à G .

Soit $x \in T'_i$ et γ l'orbite de Z en x (la feuille de G passant par x).

Si γ est homéomorphe à S^1 , on sait, par le lemme 2.7, que $\gamma = L \cap T'_i$ pour une certaine orbite cylindrique L de Φ . D'après le lemme 2.2 il existe $j \neq i$ tel que T'_j appartient à l'ensemble limite de L . Ainsi $1 \leq j \leq n$ et $L \cap T'_j = \gamma'$ est une courbe fermée simple (Lemme 2.7.). Toujours d'après le lemme 2.7 on sait que $L = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} \phi_t(\gamma')$ et donc qu'il existe un point $x' \in \gamma' = L \cap T'_j$ et un temps $t \in \mathbb{R}$ tels que $\phi_t(x') = x$ donc $\phi_{-t}(x) = x'$ et $x \in V_j$. (On peut aussi constater que d'après le lemme 2.6, γ' est un générateur de $\Pi_1(L)$, ainsi que γ , qui sont donc isotopes sur L . Comme le champ Y est transverse à γ et à γ' une simple application de la théorie de Poincaré-Bendixon montre que l'orbite par x de Y coupe γ').

Supposons que γ soit homéomorphe à $\mathbb{R}$. Par construction du tore T'_1 et d'après le lemme 2.7 nous savons que le champ Z (tangent à G) a au moins une orbite périodique sur T'_1 . D'après un théorème de A.J. Schwartz, généralisant le théorème de Poincaré Bendixon, [23] on sait que l'ensemble ω -limite de γ (γ étant considéré comme une orbite de Z) contient une orbite périodique, γ_0 , de Z . En utilisant, à nouveau, le lemme 2.2, nous savons qu'il existe j , $1 \leq j \leq n$, tel que $\gamma_0 \subset V_j$ et donc, par continuité, $\gamma \cap V_j \neq \emptyset$.

Soit L l'orbite de Φ passant par γ . D'après ce qui précède $L \cap T'_j \neq \emptyset$. D'après le lemme 2.7 $L \cap T'_j = \gamma'$ et γ' est homéomorphe à $\mathbb{R}$. On a encore $L = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} \phi_t(\gamma')$ et, puisque $\gamma \subset L$, il existe $t \in \mathbb{R}$ et $x' \in \gamma'$ tels que $x = \phi_t(x')$ et donc $\phi_{-t}(x) = x' \in T'_j$ et $x \in V_j$ ce qui achève la démonstration du lemme 2.8.

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le lemme fondamental :

Démonstration du lemme fondamental 2.1. : Si l'action Φ n'admet aucune orbite cylindrique le feuilletage $\mathcal{F}$ associé à Φ est un feuilletage de Reeb et le résultat provient du Théorème 0.3 [16].

Supposons donc qu'il existe des orbites cylindriques et soient $T'_1, \dots, T'_n$ les tores construits dans le lemme 2.5.

Soit W' la variété, difféomorphe à W , et bordée par $T'_1, \dots, T'_n$ et $T_{n+1}, \dots, T_k$.

Supposons que le champ de vecteurs Y "pointe" vers l'intérieur de W' sur le tore T'_1 . D'après le lemme 2.8, il existe j , $2 \leq j \leq n$, tel que chaque orbite du champ Y commençant en un point de T'_1 rencontre T'_j . Pour tout point $x \in T'_1$, notons $d(x)$ le point unique d'intersection de l'orbite de Y

passant par x avec T_j^1 ; d est une fonction injective d'après le lemme 2.5 et surjective d'après le lemme 2.8. appliqué à T_j^1 . Ainsi $d : T_1^1 \rightarrow T_j^1$ est un difféomorphisme.

Pour tout $x \in T_1^1$ notons $t(x)$ l'unique réel positif tel que $\phi_{t(x)}(x) = d(x)$; t est une fonction différentiable définie sur T_1^1 .

On définit alors une fonction F de $T_1^1 \times I$ dans $W^1(I = [0,1])$ par :

$$F(x, \cdot) = \phi_{t(x) \cdot}(x) \quad .$$

On peut noter que : $F(x, 1) = d(x)$

$$F(T_1^1 \times \{0\}) = T_1^1$$

$$\text{et } F(T_1^1 \times \{1\}) = T_j^1$$

Il est clair que F est un plongement de $T^2 \times I$ dans W^1 . Mais l'image de F est fermée et ouverte (par continuité du champ Y) donc F est un difféomorphisme de $T^2 \times [0,1]$ sur W^1 ce qui achève la démonstration du lemme fondamental 2.1.

Remarque 2.9. : En se servant d'un théorème de N. Kopell [4] appliqué à l'holonomie en un point d'un des tores $T_1, \dots, T_n$ définis dans la démonstration du lemme fondamental 2.1, on remarque qu'au voisinage de ces tores toutes les orbites sont cylindriques ce qui modifie, par exemple, l'énoncé du lemme 2.7 dans lequel un seul des deux cas étudiés ne se produit (l'action Φ est de classe C^r $r \geq 2$).

Remarque 2.10. [19] : On peut améliorer l'énoncé du lemme fondamental 2.1 en supposant que le nombre k de tores dans le bord de W est supérieur ou égal à 1 et non à 2.

En effet, si $k = 1$, d'après le lemme 2.2., Φ n'a pas d'orbites cylindriques et n'a que des orbites planes dans l'intérieur de W . D'après le théorème 0.3 W est alors difféomorphe à $D^2 \times S^1$. Or on sait que, d'après un théorème de Lima [6] $D^2 \times S^1$ ne peut être muni d'une action laissant son bord invariant.

Donc le cas $k = 1$ est impossible et les hypothèses du lemme fondamental avec $k \geq 1$ entraînent en fait $k \geq 2$.

II.3.

LE THEOREME PRINCIPAL.-

THEOREME 3.1.- Soit V une variété fermée orientable de dimension 3 et de rang 2. Alors V est un fibré, non trivial, sur S^1 de fibre T^2 .

Soit donc Φ une action non dégénérée de $\mathbb{R}^2$ sur V et notons $\mathcal{F}$ le feuilletage (de dimension 2) de V associé à Φ . Si toutes les orbites de Φ sont planes ($\mathbb{R}^2$) V est difféomorphe à T^3 [15] et donc V est de rang 3. Il existe donc des orbites non planes et, par le §II.1 (Lemme de Fermeture pour les orbites cylindriques denses) on peut supposer que Φ a des orbites compactes.

LEMME 3.2. [16].- Il existe un entier p tel que si $T_1, \dots, T_p$ sont des tores disjoints plongés dans V , $V - \bigcup_{i=1}^p T_i$ n'est pas connexe.

Démonstration du Lemme 3.2. :

Il faut montrer que : $\text{rang } (H_0(V - \bigcup_{i=1}^p T_i)) > 1$.

Notons $A = \bigcup_{i=1}^p T_i$.

Par dualité $H_0(V - A) = H^3(V, A)$, et on a la suite exacte :

$$H^2(V) \xrightarrow{i} H^2(A) \xrightarrow{\delta} H^3(V, A) \longrightarrow H^3(V) \rightarrow 0$$

où $H^3(V) = \mathbb{Z}$.

Par ailleurs, $\text{rang}(H^2(A)) = p$ et on a les égalités suivantes :

$$\text{rang}(H^3(V, A)) - \text{rang}(\text{Image } \delta) = 1$$

$$p - \text{rang}(\text{Image } i) = \text{rang}(\text{Image } \delta)$$

donc :

$$\text{rang}(H^3(V, A)) = 1 + p - \text{rang}(\text{Image } i)$$

et il suffit de prendre p plus grand que le rang de $H^2(V)$ pour avoir le résultat cherché.

On trouve dans [16, page 20], la remarque suivante :

Si Φ est une action de $\mathbb{R}^2$ sur V , variété fermée orientable de dimension 3, telle que toutes les orbites toriques de Φ séparent V en deux composantes connexes, alors, si Φ a une orbite torique, Φ est dégénérée.

On peut donc énoncer le lemme suivant :

LEMME 3.3.- Si Φ est une action non-dégénérée de $\mathbb{R}^2$ sur une variété V fermée orientable de dimension 3 et si Φ admet des orbites compactes, alors il existe une orbite compacte qui ne sépare pas V en deux composantes connexes.

Enfin, on a le résultat suivant :

LEMME 3.4.- Soit Φ une action non dégénérée de $\mathbb{R}^2$ sur une variété V fermée orientable de dimension 3 et supposons que Φ admette des orbites compactes. Alors il existe k orbites compactes $T_1, \dots, T_k$ telles que, si $A = \bigcup_{i=1}^k T_i$, A ne sépare pas V en deux composantes connexes, mais pour toute autre orbite compacte T , $T \neq T_i$ $\forall i = 1, \dots, k$, $A \cup T$ sépare V en deux composantes connexes. De plus $k \geq 1$ d'après le lemme 3.3.

Démonstration du lemme 3.4. : En appliquant le lemme 3.3, soit T_1 une orbite compacte ne séparant pas V en deux composantes connexes.

Si pour toute autre orbite compacte T de Φ $T_1 \cup T$ sépare V en deux composantes la propriété est vraie. Sinon il existe T_2 , une orbite compacte de Φ , telle que $T_1 \cup T_2$ ne sépare pas V en deux composantes connexes. D'après le lemme 3.2 ce processus s'arrête au bout d'un nombre fini d'orbites compactes $T_1, \dots, T_k$ qui vérifient donc les conclusions du lemme 3.4. Il faut noter que si, à un point quelconque de cette démonstration, il n'existe plus d'orbites compactes, alors la propriété est trivialement vérifiée par les k premières orbites que l'on a considéré.

Nous pouvons maintenant finir la démonstration du théorème 3.1.

Démonstration du Théorème 3.1. : Soit donc une variété V fermée orientable de dimension 3 munie d'une action Φ non dégénérée de $\mathbb{R}^2$ admettant des orbites compactes. Soient $T_1, \dots, T_k$ les orbites compactes données par le lemme 3.4.

Désignons par W la variété obtenue en coupant V le long de chacune des orbites T_i . W est une variété ayant $2k$ tores dans son bord et W est munie d'une action de $\mathbb{R}^2$ non dégénérée et qui laisse son bord invariant, action que nous continuerons à noter Φ . De plus, toutes les orbites compactes de Φ dans l'intérieur de W séparent W en deux composantes connexes (3.4). On note $T_1, \dots, T_n$ les tores de ∂W et nous allons montrer que W est difféomorphe à $T^2 \times [0,1]$.

Soit M l'ensemble des orbites compactes de Φ dans l'intérieur de W . Si M est vide, le lemme fondamental 2.1 s'applique à W qui est alors difféomorphe à $T^2 \times [0,1]$.

Pour $i = (1, \dots, n)$ notons $M(i)$ l'ensemble des orbites compactes de M qui bordent avec T_i une sous-variété de W qui n'a que T_i et cet élément de M dans son bord. Notons $M(\emptyset)$ l'ensemble des orbites compactes de M qui bordent

une sous-variété de W . D'après un résultat de [16], la seule variété orientable de dimension 3 ayant un tore pour bord et munie d'un feuilletage dont le bord est une feuille et tel que toute feuille compacte dans l'intérieur sépare la variété en deux composantes connexes, est $D^2 \times S^1$ dont on sait par Lima [6] qu'elle ne peut être munie d'une action non dégénérée de R^2 . Ainsi $M(\emptyset) = \emptyset$.

Soit $T \in M(i)$ et notons $W(T)$ la sous-variété de W bordée par $T \cup T_1$. On définit un ordre partiel dans $M(i)$ par : $T \leq T'$ si, et seulement si, $W(T) \subset W(T')$.

Nous allons maintenant procéder en faisant une récurrence sur le nombre k de tores dans ∂W .

Si $n = 2$, $T_1 \cup T_2 = \partial W$. Supposons que $M(1)$ soit vide. Alors M est vide et d'après le lemme fondamental 2.1, $W \approx T^2 \times [0,1]$. Si $M(1)$ est non vide, soit C_1 l'ensemble des éléments T de $M(1)$ tels que $W(T) \approx T^2 \times [0,1]$, ce qui veut dire que C_1 est l'ensemble des orbites compactes T dans $\text{int}.W$ telles que T et T_1 , bordent un cobordisme trivial dans W_1 . Pour la relation d'ordre définie plus haut, C_1 est un ensemble inductif. En effet soit $(T_\alpha)_{\alpha \in B}$ une famille totalement ordonnée d'éléments de C_1 . Soit $S = \overline{\bigcup_{\alpha \in B} W(T_\alpha)}$. $\partial S - T_1$ est un ensemble fermé invariant par Φ et non vide donc $\partial S - T_1$ contient un ensemble Φ minimal qui est une orbite compacte T .

Il est clair qu'une sous-suite de (T_α) tend uniformément vers T et donc que $T \in C_1$ et $T_\alpha < T \quad \forall \alpha \in B$.

Par ailleurs, on peut noter que si $C_1 = \emptyset$ alors $W \approx T^2 \times [0,1]$. En effet, si $C_1 = \emptyset$, T_1 est une orbite compacte isolée de Φ et, puisque M est un ensemble fermé, il existe $T \in M(1)$ tel que $W(T)$ n'a pas d'orbite compacte dans son intérieur. D'après le lemme fondamental 2.1 $W(T)$ est alors difféomorphe à $T^2 \times [0,1]$ ce qui est contradictoire avec $C_1 = \emptyset$. Donc $C_1 \neq \emptyset$ ou $T = T_2$.

On peut donc supposer par Zorn, qu'il existe un élément maximal T dans C_1 .

Si T est différent de T_2 , soit W_0 la variété bordée par T_2 et T . Puisque T est maximal dans C_1 , T est une orbite compacte isolée dans W_0 et, en raisonnant comme plus haut, on voit qu'il existe une orbite compacte T_0 , $T_0 \neq T$, dans W_0 telle que la variété bordée par T_0 et T ne contienne aucune orbite compacte, et est donc difféomorphe à $T^2 \times [0,1]$ par le lemme fondamental 2.1 ce qui contredit la maximalité de T . Ainsi $T = T_2$ et W est difféomorphe à $T^2 \times [0,1]$ ce qui démontre le théorème dans le cas $n = 2$.

Supposons maintenant que $\partial W = T_1 \cup \dots \cup T_n$ avec $n > 2$. Si $M(i)$ n'est pas vide pour un i , $1 \leq i \leq n$, soit $T \in M(i)$. Alors $W(T)$ est difféomorphe à $T^2 \times [0,1]$ car $W(T)$ correspond au cas $n = 2$. Soit $B_i = \bigcup_{T \in M(i)} W(T)$. B_i est difféomorphe à $T^2 \times [0,1]$ et donc $W_0 = W - \bigcup_{i=1}^n B_i$ est difféomorphe à W .

La variété W_0 a les mêmes propriétés que la variété W sauf qu'aucune orbite compacte dans l'intérieur de W_0 ne forme avec l'un des $T_1', \dots, T_n'$, qui sont les tores de ∂W_0 , le bord d'une sous-variété de W_0 .

Le raisonnement que nous allons appliquer à W_0 est le même que nous appliquons à W dans le cas où $M(i) = \emptyset \quad \forall i = (1, \dots, n)$.

Si il n'existe aucune orbite compacte dans l'intérieur de W_0 , W_0 est difféomorphe à $T^2 \times [0,1]$ d'après le lemme fondamental 2.1.

Sinon, soit T une orbite compacte dans l'intérieur de W_0 . Il existe alors k , $1 < k < n - 1$ tel que $T \cup T_1' \cup \dots \cup T_k'$ borde une sous-variété B de W_0 et nous pouvons appliquer l'hypothèse de récurrence à B pour conclure que B est difféomorphe à $T^2 \times [0,1]$ et donc $k = 1$ ce qui est une contradiction avec les hypothèses sur T .

Ainsi il n'existe pas d'orbites compactes dans l'intérieur de W_0 et donc $W_0 \approx W \approx T^2 \times [0,1]$ d'après le lemme fondamental 2.1.

La variété V , de laquelle nous étions parti, est donc obtenue en identifiant le bord $T^2 \times \{0\}$ de W avec le bord $T^2 \times \{1\}$ par un difféomorphisme du tore T^2 conservant l'orientation ce qui achève la démonstration du théorème 3.1.

THEOREME 3.5.- Soit V une variété compacte orientable de dimension 3 telle que le bord de V soit le tore T^2 . Alors toute action de $\mathbb{R}^2$ sur V laissant le bord de V invariant est dégénérée.

Démonstration du théorème 3.5. : Soient V une variété compacte orientable de dimension 3, $\partial V = T^2$, Φ une action non dégénérée de $\mathbb{R}^2$ sur V , $\mathcal{F}$ le feuilletage de V associé à Φ . Nous allons tout d'abord nous ramener au cas où $\mathcal{F}$ à des feuilles compactes dans l'intérieur de V .

a) S'il n'existe ni feuilles compactes ni feuilles cylindriques dans l'intérieur de V , alors $(V, \mathcal{F})$ est une composante de Reeb et, par le Théorème 0.3 [16], V est difféomorphe à $D^2 \times S^1$. On sait, d'après Lima [6], que toute action de $\mathbb{R}^2$ sur $D^2 \times S^1$ laissant $T^2 = \partial(D^2 \times S^1)$ invariant est dégénérée.

b) S'il n'existe pas de feuilles compactes mais des feuilles cylindriques dans l'intérieur de V , on peut appliquer le lemme 2.2 pour obtenir une contradiction.

On peut donc supposer que $\mathcal{F}$ admet des feuilles compactes dans l'intérieur de V .

Désignons par S l'ensemble des feuilles compactes de $\mathcal{F}$ dans l'intérieur de V qui séparent V en deux composantes connexes. Si $T = \partial V$ et $T' \in S$ notons $W(T')$ la sous-variété de V bordée par $T \cup T'$. On munit S de la rela-

tion d'ordre $T' \leq T''$ si, et seulement si $W(T') \subset W(T'')$.

L'ensemble S ainsi ordonné est un ensemble inductif ; en effet, (comme dans la démonstration du théorème 3.1) si $(T_\alpha)_{\alpha \in \beta}$ est une sous-famille, (totallement ordonnée) de S on pose $C = \overline{\bigcup_{\alpha \in \beta} W(T_\alpha)}$. $\partial C = T$ est invariant, fermé, non vide et contient un ensemble Φ -minimal qui est une orbite compacte M (Sacksteder [22]).

Il est aisé de voir que $M \in S$ et $M \geq T_\alpha \forall \alpha \in \beta$. En appliquant le lemme de Zorn, il existe une orbite compacte M' , maximal dans S . M' sépare V en deux composantes connexes dont l'une, W , est telle que $\partial W = M'$. W a les mêmes propriétés que V sauf que aucune orbite compacte dans l'intérieur de W ne sépare W en deux composantes connexes (sinon, la "maximalité" de M' serait mise en défaut). Nous allons poursuivre la démonstration en remplaçant W par V et en supposant donc qu'aucune orbite compacte dans $\text{int} V$ ne sépare V en deux composantes connexes. On utilise maintenant les lemmes 3.2 et 3.4 (qui sont aussi vrais si $\partial V \neq \emptyset$) pour trouver k feuilles compactes $T_1, \dots, T_k$ dans l'intérieur de V telles que, si $A = \bigcup_{i=1}^k T_i$, $V - A$ est connexe, mais toute autre feuille compacte T' , $T' \neq T_i$, $\forall i = (1, \dots, k)$, est telle que $A \cup T'$ sépare V en deux composantes connexes.

Soit W la variété obtenue en coupant V le long de chacun des T_i , $i = (1, \dots, k)$. W est une variété ayant $2k + 1$ tores dans le bord et son bord est invariant par l'action Φ . De plus, toute feuille compacte dans l'intérieur de W sépare W en deux composantes connexes.

Nous allons maintenant procéder à peu près comme dans la démonstration du Théorème 3.1.

Soient $T_1, \dots, T_n$ les feuilles qui sont les composantes du bord de W : $n = 2k + 1$ et $T_n = T = \partial V$. Soit $M(i)$ l'ensemble des feuilles compactes T'

dans l'intérieur de W telles que $T_i \cup T'$ soit le bord d'une sous-variété de W . (On peut noter que $M(n) = \emptyset$ puisque aucune feuille compacte ne sépare V en deux composantes connexes). Notons $W(T')$ cette sous-variété pour $T' \in M(i)$. En appliquant à notre situation le cas $n = 2$ du théorème 3.1 on peut remarquer que $W(T')$ est difféomorphe à $T^2 \times [0,1]$.

Soit alors $B_i = \bigcup_{T' \in M(i)} W(T')$. B_i est difféomorphe à $T^2 \times [0,1]$ donc $W_0 = W - \bigcup_{i=1}^n B_i$ est difféomorphe à W . La variété W_0 a la propriété qu'aucune des feuilles compactes dans l'intérieur de W_0 ne forme, avec une seule des composantes de ∂W_0 le bord d'une sous-variété de W_0 .

S'il n'existe aucune feuille compacte dans l'intérieur de W_0 , la remarque 2.10 et le lemme fondamental 2.1 nous permettent de conclure que W_0 est difféomorphe à $T^2 \times [0,1]$ ce qui est impossible car W_0 a $2k+1$ composantes connexes dans son bord.

Nous pouvons donc supposer qu'il existe T' une feuille compacte dans l'intérieur de W_0 . D'après ce qui précède il existe p , $0 < p < k$, tel que $T' \cup T_{i_1} \cup \dots \cup T_{i_{2p+1}}$ soit le bord d'une sous-variété B de W_0 . Comme dans la démonstration du théorème 3.1 on en conclut que B est difféomorphe à $T^2 \times [0,1]$ et donc que $p = 0$ ce qui est impossible.

On obtient ainsi une contradiction en supposant l'action Φ de $\mathbb{R}^2$ sur V non dégénérée ce qui achève la démonstration du théorème 3.5.

II.4.

Nous terminons ce chapitre en citant les résultats récents obtenus par Chatelet-Rosenberg et qui généralisent ceux de la Partie II. Ils ont démontré le Théorème suivant :

THEOREME 4.1. (Chatelet-Rosenberg).-

Soit Φ une action de classe C^r ($r \geq 2$) de $\mathbb{R}^n$ sur une variété fermée orientable V de dimension $n + 1$.

Alors :

- a) Si Φ admet des orbites compactes, V est fibré sur S^1 de fibre T^n ,
- b) Dans tous les cas V est fibré sur T^k de fibre T^{n-k} .

La démonstration du Théorème 4.1., n'est pas une généralisation de celle du Théorème 3.1, mais utilise des techniques nouvelles et des résultats très récents, notamment le Théorème de N.Kopell cité page 53 de ce chapitre, et aussi le résultat suivant :

Si V est une variété fermée munie d'un feuilletage par plan de codimension 1 alors V est difféomorphe au tore T^n .

(Ce résultat a été démontré en dimension 3 par Rosenberg-Sondow, en dimension 4 par Joubert-Moussu, et en dimension $n \geq 5$ on utilise un résultat de Wall qui montre que toute variété de dimension plus grande que 5, qui a le type d'homotopie d'un tore, est un tore).

Les parties importantes de la démonstration du théorème 4.1 se situent :

- dans l'utilisation du résultat suivant, dû à R. Moussu [7] :

Si T est une feuille compacte, homéomorphe à un tore, d'un feuilletage de codimension 1 et si T est isolé parmi l'ensemble des feuilles compactes, alors il existe un voisinage de T dans lequel toutes les feuilles, sauf T , sont sans holonomie.

- dans la construction de tores transverses au feuilletage, comme dans le lemme 2.4, mais avec la propriété qu'il existe un champ de vecteurs tangeant aux feuilles dont toutes les orbites quittant un de ces tores transverses en coupent un autre.

(Dans le lemme 2.4 on utilise l'existence de feuilles cylindriques pour trouver un tel champ mais en plus grande dimension les difficultés sont d'ordre analytiques).

Une dernière particularité de ce travail est que l'action doit obligatoirement être de classe au moins 2 alors que la démonstration du théorème 3.1 (§II.3) n'utilise que des propriétés topologiques et des résultats de [16] qui pourrait être variés en classe C^0 .

Plus précisément, si les résultats de [16] sont vrais en classe C^0 alors le théorème 3.1 l'est également en classe C^0 , mais c'est un problème ouvert que de démontrer certains résultats de [16] dans le cas topologique.

Partie III.

CLASSIFICATION DU TYPE TOPOLOGIQUE DES ACTIONS DE $\mathbb{R}^2$ SUR
LES VARIETES FERMEES ORIENTABLE DE DIMENSION 3.

-:-:-

III.0.

INTRODUCTION.— Cette partie est consacrée à l'étude et à la classification du type topologique des actions de $\mathbb{R}^2$ sur les variétés fermées orientables de dimension 3.

Si V est une telle variété et Φ une action non dégénérée de $\mathbb{R}^2$ sur V , on notera $\mathcal{F}(\Phi)$ le feuilletage de V associé à Φ . Rappelons que $\mathcal{F}(\Phi)$ est un feuilletage de dimension 2 dont les feuilles sont des plans, des cylindres ou des tores.

De plus, V étant orientable, $\mathcal{F}(\Phi)$ est un feuilletage transversalement orientable.

DEFINITION 0.1.— Deux actions Φ et ψ de $\mathbb{R}^2$ sur une variété V sont équivalentes s'il existe un homéomorphisme $h : V \rightarrow V$ qui envoie les feuilles de $\mathcal{F}(\Phi)$ sur les feuilles de $\mathcal{F}(\psi)$.

Nous supposerons, dans la suite, que les actions de $\mathbb{R}^2$ sont de classe C^2 au moins.

D'après la partie II nous savons que si V est une variété fermée orientable de dimension 3 munie d'une action non dégénérée de $\mathbb{R}^2$, alors V est un fibré sur S^1 de fibre le tore T^2 . En fait V est difféomorphe à $T^2 \times I / F$ (notation que nous utiliserons constamment dans la suite) où I désigne l'intervalle $[0,1]$ et où F est un difféomorphisme du tore, conservant l'orientation, et induit par un

élément M_F de $SL_2(\mathbb{Z})$; $T^2 \times I /_F$ est alors l'espace quotient de $T^2 \times I$ où $(x,1)$ est identifié avec $(F(x),0)$. Le fait que l'on puisse se ramener au cas où F est un difféomorphisme linéaire du tore est une conséquence immédiate des deux propriétés suivantes : (par $\text{Diff}^+(T^2)$ on entend le groupe des difféomorphismes du tore conservant l'orientation)

a) Si f et f' sont des éléments isotopes de $\text{Diff}^+(T^2)$ ils induisent des fibrés isomorphes $(T^2 \times I /_f \approx T^2 \times I /_{f'})$.

b) Les classes d'isotopies de $\text{Diff}^+(T^2)$ sont classifiées par $SL_2(\mathbb{Z})$.

On peut maintenant donner un résumé des résultats que l'on obtient :

1) Si toutes les orbites de Φ sont planes, V est difféomorphe à T^3 et Φ est équivalente à une action linéaire [17].

2) Si Φ n'a pas d'orbites compactes et si toutes les orbites de Φ ne sont pas planes, alors toutes les orbites de Φ sont cylindriques et F à 1 comme valeur propre. L'action Φ est alors équivalente à la suspension d'une action non dégénérée du cercle sur le tore T^2 . (i.e. : si $\mathcal{F}$ est le feuilletage du tore T^2 associée à une action périodique, non dégénérée de $\mathbb{R}$, la suspension de $\mathcal{F}$ sera le feuilletage sur $T^2 \times T /_F$ obtenue en prenant le feuilletage produit $\mathcal{F} \times I$ sur $T^2 \times I$ modifié, au besoin, par une "rotation" du facteur $T^2 \times \{1\}$, et en recollant ensuite les deux bords au dessus de F).

3) Si Φ admet une orbite compacte T , la variété obtenue en coupant V le long de T est difféomorphe à $T^2 \times I$, toutes les orbites compactes de Φ sont isotopes dans V et, si T_1 et T_2 sont des orbites compactes de Φ qui bordent une sous-variété W de V ne contenant aucune autre orbite compacte, alors W est difféomorphe à $T^2 \times I$ et toutes les orbites de Φ dans W sont soit des plans, soit des cylindres (mais il n'y a pas de mélange des deux) qui spiralent d'une façon précise vers les bords T_1 et T_2 de W .

On peut remarquer comme conséquence des résultats 2), que si F n'a pas la valeur propre 1, toutes les actions de $\mathbb{R}^2$ sur $V \approx T^2 \times I/F$ admettent des orbites compactes. Dans ce cas, d'ailleurs, nous démontrerons plus : si F n'a pas 1 comme valeur propre toutes les orbites compactes sont isotopes à la fibre $T^2 \times \{0\}$ de $T^2 \times I/F$.

III.1.

QUELQUES PROPRIETES GENERALES DES FIBRES $T^2 \times I/F$. - Dans ce qui suit, nous désignerons soit par V soit par $T^2 \times I/F$, les variétés décrites dans l'introduction (III.0).

III.1.A.

DEFINITIONS, NOTATIONS et GROUPE FONDAMENTAL. - Soit p la projection naturelle de $T^2 \times I \rightarrow V$ et notons $T_0 = p(T^2 \times \{0\})$.

Si T est une surface plongée dans V on dira que T est incompressible [28] si l'inclusion $i : T \hookrightarrow V$ induit une injection $i_* : \Pi_1(T) \rightarrow \Pi_1(V)$.

On désigne par $M(T)$ la variété, à bords, obtenue en coupant V le long de T . On peut remarquer, par exemple, que $M(T_0)$ est difféomorphe à $T^2 \times I$. (là où il n'y aura pas de confusion possible, nous identifierons ces deux variétés et nous appellerons T_0 et T_1 les composantes du bord de $M(T_0)$).

Par ailleurs, on note $T^2 = \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2$ et si $q \in \mathbb{R}^2, [q]$ désigne la classe de q dans T^2 .

Soit $*$ = $p([0,0],0)$ un point base de V . $\Pi_1(V)$ et $\Pi_1(T_0)$ désignent, respectivement, $\Pi_1(V,*)$ et $\Pi_1(T_0,*)$. Si $\mu(t) = p([0,0],t)$ pour $t \in I$ on définit c comme étant la classe d'homotopie du lacet μ dans $\Pi_1(V)$.

Soit (a,b) une base de $\Pi_1(T_0) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, $\Pi_1(V)$ est alors le quotient du groupe libre sur les générateurs a, b et c par les relations :

$$ab = ba$$

$$cac^{-1} = F_*(a)$$

$$cbc^{-1} = F_*(b) .$$

En fait $\Pi_1(V) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \underset{F}{*} \mathbb{Z}$ est le produit semi-direct du sous-groupe invariant $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} = (a) \oplus (b)$ par le sous-groupe $\mathbb{Z} = (c)$ au-dessus du morphisme de $\mathbb{Z} \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z})$ donné par la matrice représentant la classe d'isotopie de F dans $SL_2(\mathbb{Z})$.

(N.B. : $F \in \text{Diff}^+(T^2)$ et F_* est l'application induite par F de $\Pi_1(T^2) \rightarrow \Pi_1(T^2)$).

III.1.B.

UNE METHODE DE DISJONCTION DE CERTAINES SOUS-VARIETES DE $T^2 \times I/F$. - Soit T un tore prolongé dans $V = T^2 \times I/F$. On suppose que T est incompressible et que, si $i : T \hookrightarrow V$ est l'inclusion de T dans V , $i_*\Pi_1(T) = \Pi_1(T_0)$ (i.e., tout lacet sur T est homotope à un lacet sur T_0). Nous allons montrer que T est isotope, dans V , à un tore T' tel que $T' \cap T_0 = \emptyset$.

(Des notes de F. Laudenbach sur une proposition équivalente dans $V = T^3$ ont été utiles dans la rédaction de ce qui suit).

LEMME B.1. - $V = T^2 \times I/F$ est une variété irréductible (i.e. : Toute 2-sphère plongée dans V borde une 3-boule).

Démonstration du lemme B.1. : Il est trivial de constater que $V = T^2 \times I/F$ admet $T^2 \times \mathbb{R}$ comme revêtement et admet donc $\mathbb{R}^3$ comme revêtement universel. Dans [15] on trouve un argument simple qui montre alors que V est irréductible.

PROPOSITION B.2. - Soient $V = T^2 \times I/F$ et $T \subset V$ comme ci-dessus. Alors, il existe un tore plongé T' dans V , isotope à T dans V et tel que $T' \cap T_0 = \emptyset$.

On peut en fait noter que d'après cette proposition on peut disjoindre, par une isotopie, T de n'importe quelle fibre de V .

COROLLAIRE B.3.- Si on coupe V le long de T la variété obtenue est difféomorphe à $T^2 \times I$ (i.e. $M(T) \approx T^2 \times I$) .

Démonstration du corollaire B.3. : Soit T' le plongement incompressible du tore, isotope à T , et donné par la proposition B.2.

Il est clair que T' induit un plongement incompressible du tore (que nous continuerons à noter T') dans $M(T_0) = T^2 \times I$. T' sépare alors $T^2 \times I = M(T_0)$ en deux composantes connexes A et B tels que $T^2 \times \{0\} \subset A$ et $T^2 \times \{1\} \subset B$ (cette dernière condition étant équivalente à l'hypothèse d'incompressibilité (voir Proposition D.1, §III.1.D.)) .

Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage de Reeb de $T^2 \times I$, i.e. : Un feuilletage de classe C^2 - au moins dont les seules feuilles compactes sont les composantes du bord de $T^2 \times I$ et dont toutes les autres feuilles sont des plans [16]. T' étant incompressible, T' est isotope, dans $\text{int}(T^2 \times I)$ à un tore T'' transverse au feuilletage $\mathcal{F}$. $\mathcal{F}$ induit alors un feuilletage sur T'' (les feuilles sont l'intersection des feuilles de $\mathcal{F}$ avec T'') qui est topologiquement un flot irrationnel (Théorème 1.1 de [17]) .

On peut donc supposer que T' est transverse à $\mathcal{F}$ et que $\mathcal{F} \cap T'$ est un flot irrationnel.

Soit T'_0 un tore plongé dans $\text{int}.A$ de telle façon que $T'_0 + T'_0$ borde un cobordisme trivial dans A et que T'_0 soit transverse à $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F} \cap T'_0$ soit un flot irrationnel. On peut trouver une telle construction dans [16] par exemple. (N.B. : $T'_0 = T^2 \times \{0\} \subset T^2 \times I$) . Soit A_0 la sous-variété bordée par $T'_0 + T'$. A_0 et A sont évidemment difféomorphes et chaque feuille de $\mathcal{F}$ dans $\text{int}.A_0$ est homéomorphe à $\mathbb{R}^2$ puisque toute sous-variété fermée de $\mathbb{R}^2$ difféomorphe à $\mathbb{R}$ sépare $\mathbb{R}^2$ en deux composantes connexes dont chacune est homéomorphe à $\mathbb{R}^2$. On utilise alors la démonstration du théorème 3.5 de [16] pour voir que A_0 est difféomorphe à $T^2 \times I$. Ainsi A et B sont difféomorphes à $T^2 \times I$ et, notamment, T' est isotope à T_0 ce qui démontre le corollaire B.3.

Démonstration de la proposition B.2. : Par une première isotopie on met T et T_0 en position générale. $T \cap T_0 = \emptyset$ ou $T \cap T_0$ est une variété compacte de dimension 1 i.e. : $T \cap T_0$ est alors la réunion d'un nombre fini de courbes fermées simples disjointes.

a) Nous allons commencer par faire une isotopie sur T qui élimine les courbes d'intersections homotopes à 0.

D'après les hypothèses (T et T_0 sont incompressibles) si γ est une courbe d'intersection homotope à 0 dans V , elle borde sur T_0 un unique 2-disque D_0 et sur T un unique 2-disque D . Il est clair que parmi l'ensemble des intersections homotopes à 0 on peut choisir γ minimal sur T : i.e. : le disque D sur T bordé par γ ne contient aucune autre courbe d'intersection.

D'après le lemme B.1. V est irréductible et $D_0 \cup D$ borde dans V une boule B (anguleuse). $\text{Int } D \cap T_0$ étant vide, $\text{int } B \cap T_0$ est vide car T ne peut être tout entier contenu dans B .

On considère alors un cylindre $D^2 \times [0,1]$ (D^2 = le 2-disque standard) plongé dans un voisinage tubulaire de T_0 et tel que $D^2 \times \{0\}$ est envoyé sur D_0 et $\partial D^2 \times [0,1]$ est envoyé sur T . (Figure 1). On effectue alors une isotopie qui envoie $D \cup \partial D^2 \times [0, \frac{1}{2}]$ dans $D^2 \times]0, \frac{1}{2}]$ ainsi que son intérieur, en déplaçant $D \cup \partial D^2 \times [0, \frac{1}{2}]$ à travers la boule $B \cup D^2 \times [0, \frac{1}{2}]$. Ceci a pour effet d'éliminer l'intersection γ ainsi que toutes les courbes d'intersections contenues dans $\text{int } D_0$.

On peut donc éliminer de cette façon toutes les courbes d'intersections homotopes à 0.

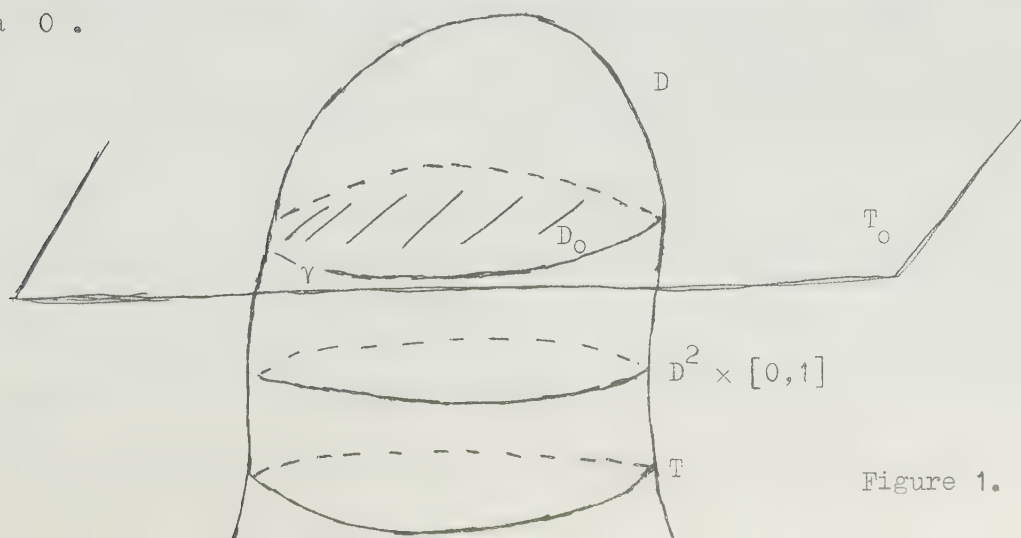


Figure 1.

b) On suppose maintenant que toutes les courbes d'intersections entre T_0 et T sont non homotopes à 0.

On peut ainsi supposer que $T \cap T_0 = c_1 \cup \dots \cup c_n$ où chaque c_i est un générateur de $\Pi_1(T_0)$ et de $\Pi_1(T)$. Les courbes c_i sont disjointes deux à deux et non homotopes à 0 sur T_0 donc les c_i sont isotopes et on peut les supposer isotopes au générateur $S^1 \times \{0\}$ de T_0 par exemple. Puisque les courbes c_i sont disjointes et isotopes, deux quelconques d'entre elles limitent sur T des bandes cylindriques et on peut donc les indexer de telle sorte que c_i et c_{i+1} bordent une bande cylindrique A_i sur T ne contenant, dans son intérieur, aucune courbe d'intersection et ceci $\forall i \in (1, \dots, n)$ (avec $c_{n+1} = c_1$).

Considérons sur T une courbe simple b qui rencontre chaque c_i en un point et un seul x_i . Ayant fixé une orientation sur V et une orientation sur le fibré normal de T_0 dans V (qui est trivial) on peut associer à chaque c_i le signe $+$ ou $-$ suivant que, en x_i , l'orientation de b coïncide avec l'orientation du fibré normal de T_0 dans V .

On peut alors calculer l'intersection homologique de la courbe b avec le tore T_0 .

Cette intersection, dans $H^3(V, \mathbb{Z}_2)$ est nulle car d'après les hypothèses $(\Pi_1(T_0) = \Pi_1(T))$ b est homologue à une courbe sur T_0 et, le fibré normal de T_0 dans V étant trivial, cette courbe peut être séparée de T_0 . Ainsi le nombre de signes $+$ est égal au nombre de signes $-$ (et n est pair) et nous allons éliminer les courbes c_i par paires d'éléments de signes contraires.

Soient deux courbes d'intersections c_1 et c_2 par exemple, de signes opposés et telles que (suivant en fait l'indexation des c_i) elles limitent sur T une bande cylindrique A_1 ne contenant, dans son intérieur, aucune autre courbe d'intersection. Dans $M(T_0) \approx T^2 \times I$ (V coupé le long de T_0) cette bande A_1 devient, par construction, une bande cylindrique allant d'une courbe de $T_0 = T^2 \times \{0\}$ notée c_1 à une courbe de T_0 notée c_2 . Rappelons que l'on a supposé les c_i isotopes au

générateur $S^1 \times \{0\}$ de T_0 . On peut donc supposer que le générateur $\{0\} \times S^1$ coupe c_1 (resp. c_2) en un point exactement, point que nous noterons m_1 (resp. m_2).

Notons A_0 et A'_0 les bandes cylindriques sur T_0 limitées par c_1 et c_2 .

Soient $\alpha_0 = A_0 \cap (\{0\} \times S^1)$ et $\alpha'_0 = A'_0 \cap (\{0\} \times S^1)$ ($A_0 \cup A'_0 = T_0$
 $\alpha_0 \cup \alpha'_0 = \{0\} \times S^1$).

Désignons, enfin, M_0 l'anneau $\{0\} \times S^1 \times I$ dans $M(T_0) = T^2 \times I$ et par α_1 l'intersection de M_0 avec A_1 qui passe par les points m_1 et m_2 .

Il est clair que $\alpha_1 \cup \alpha_0$ ou $\alpha_1 \cup \alpha'_0$ est homotope à 0 dans M_0 . On peut supposer, sans restreindre la généralité, que $\alpha_1 \cup \alpha_0$ est homotope à 0 et donc borde un disque Δ_0 dans M_0 .

Les intersections de Δ_0 avec T (en position générale) sont de deux types. Ce sont soit des courbes fermées simples homotopes à 0, soit des segments dans Δ_0 ayant leurs points extrêmes sur α_0 . On élimine, comme en a) les courbes d'intersection homotopes à 0 et on considère ensuite dans Δ_0 une courbe d'intersection minimale, c'est-à-dire que le disque, dans Δ_0 , que cette courbe borde avec un segment de α_0 , ne contient, dans son intérieur, aucune autre courbe d'intersection de Δ_0 avec T . Nous allons garder les mêmes notations que précédemment et donc désigner par Δ_0 ce nouveau disque (minimal), par α_1 la partie de son bord appartenant à T et par α_0 la partie de son bord appartenant à T_0 .

Ce disque Δ_0 a donc maintenant la propriété de ne pas rencontrer, dans son intérieur, le tore T . [Figures 2 et 3].

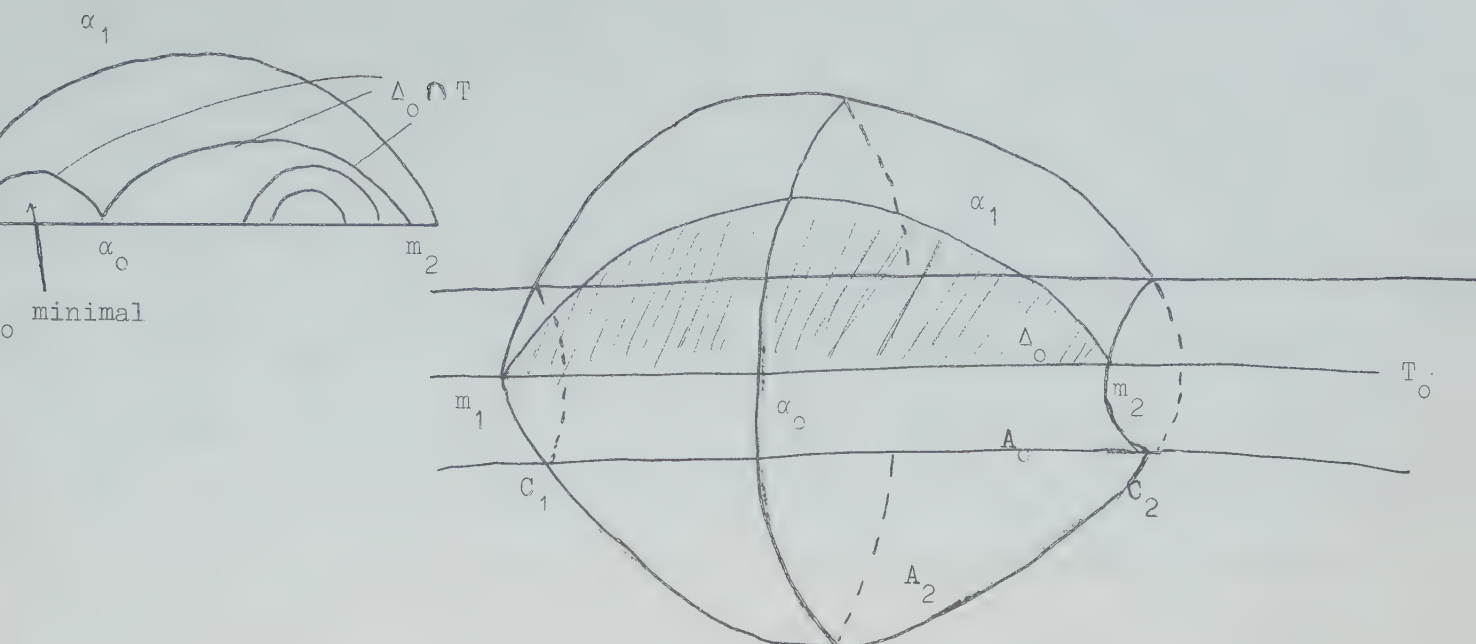


Figure 3 (le disque Δ_0 est minimal).

Dans $M(T_0) = T^2 \times I$ le disque Δ_0 et la composante $T^2 \times \{1\}$ sont disjoints par construction, donc, par passage au quotient dans $V = T^2 \times I / \mathbb{F}$, $\alpha_1 \cup \alpha_0$ borde dans V un disque Δ_0 . Notons par W la composante de V bordée par $A_0 \cup A_1$ et contenant le disque Δ_0 .

En coupant W le long de Δ_0 on obtient une variété $\bar{W}$ bordée par une sphère S de dimension 2 plongée dans V . ($\partial \Delta_0$ est un générateur d'homotopie du tore topologique $A_0 \cup A_1$).

D'après le lemme B.1 V est irréductible donc S borde une boule unique dans V . Cette boule ne contient pas Δ_0 sinon elle contiendrait c_1 et c_2 , par exemple, qui seraient alors homotopes à 0. Donc cette boule est égale à $\bar{W}$ et ainsi W est un tore plein (anguleux) dans V (ou dans $M(T_0)$).

Nous sommes maintenant dans une situation standard à partir de laquelle la disjonction de A_0 avec A_1 par une isotopie (ce qui élimine les intersections c_1 et c_2 sans en ajouter d'autres) peut se faire simplement.

Plus précisément, il existe un plongement Φ de $S^1 \times (D^2, D_+^1, D_-^1)$ sur (W, A_0, A_1) où D_+^1 et D_-^1 désignent les deux hémisphères du bord de D^2 . (Fig.4)

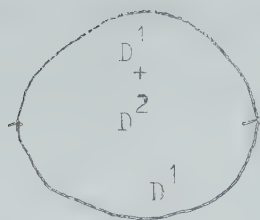


Figure 4.

Ce plongement se prolonge en un plongement $\bar{\Phi}$ de $S^2 \times (D^2, D^1_+ \times [0,1], D^1_-)$ en envoyant $S^1 \times (D^1_+ \times [0,1])$ dans un voisinage tubulaire de T_0 de l'autre côté de W , et tel que $\bar{\Phi}(S^1 \times \partial D^1_+ \times [0,1])$ soit contenu dans T . On sait alors éliminer $S^1 \times D^1_+ \cap S^1 \times D^1_-$ par une isotopie ce qui a pour effet (via le plongement $\bar{\Phi}$) d'éliminer dans V les courbes d'intersections c_1 et c_2 par une isotopie à travers l'image de $\bar{\Phi}$ et qui est l'identité en dehors de cette image.

Par récurrence, on élimine ainsi toutes les courbes c_i .

Remarque B.4. : Les techniques et les résultats de Waldhausen [28] auraient permis une démonstration plus "courte" de la proposition B.2. Mais les résultats de Waldhausen sont beaucoup plus généraux et nous pensons qu'une démonstration simple et directe est plus appropriée à l'étude de ce cas simple. De plus les techniques employées dans ce paragraphe seront utilisées dans la suite.

III.1.C.

PLONGEMENTS INCOMPRESSIBLES DE TORES DANS LES FIBRES $V = T^2 \times I/F$. — Nous sommes amenés, dans ce paragraphe à étudier les plongements incompressibles du tore dans $V = T^2 \times I/F$ pour les raisons suivantes : Si Φ est une action non dégénérée de $\mathbb{R}^2$ sur V et T une orbite compacte de Φ , nous montrerons plus loin que T est un plongement incompressible du tore T^2 dans V qui ne sépare pas V en deux composantes connexes. En démontrant que, dans ces hypothèses, $M(T)$ est difféomorphe à $T^2 \times I$, nous ramenons l'étude et la classification des actions de $\mathbb{R}^2$ sur les variétés fermées orientables de dimension 3 à l'étude de telles actions sur la variété $T^2 \times I$.

Le résultat essentiel est donc que $M(T)$ est difféomorphe à $T^2 \times I$ (Rappelons que si T est une surface plongée dans V . $M(T)$ désigne la variété à bord obtenue en coupant V le long de T).

THEOREME C.1.- Soit T un tore plongé dans $V = T^2 \times I/F$ incompressible et qui ne sépare pas V en deux composantes connexes. Alors $M(T) \approx T^2 \times I$.

Remarque C.2. :

Nous donnerons plus loin un exemple de tore incompressible dans V qui sépare V en deux composantes connexes, donc l'hypothèse sur la connexité de $V - T$ est nécessaire.

Par ailleurs, on peut noter que le théorème C.1 montre que T est en fait la fibre (ou une fibre) d'une structure de fibré sur S^1 de V apparemment non isomorphe à la structure de départ $V = T^2 \times I/F$. Plus précisément, il existe $F' \in SL_2(\mathbb{Z})$ tel que $V = T^2 \times I/F = T^2 \times I/F'$ et tel que T soit une fibre de $V = T^2 \times I/F'$. En fait, nous montrerons, dans un appendice, que toutes les structures de V comme fibré sur S^1 de fibre T^2 sont isomorphes.

(N.B. Deux fibrés V et V' sur S^1 de fibre T^2 sont isomorphes si, et seulement si, il existe un homéomorphisme de V sur V' qui envoie fibre sur fibre. (Nous ne faisons pas intervenir le groupe de la fibration dans cette définition mais nous verrons dans l'appendice comment lier ce type d'isomorphisme au théorème de classification des fibrés sur les sphères (Steenrod [27])).

Pour démontrer le théorème C.1. nous aurons besoin du résultat suivant : (On rappelle que $T_0 \subset V$ est la fibre $T^2 \times \{0\}$ de $T^2 \times I/F$).

LEMME C.2.- Soit T un tore incompressible plongé dans V . Alors, il existe un tore plongé T' isotope à T dans V et tel que T' est la réunion, dans $M(T_0)$, d'un nombre fini de composantes connexes vérifiant :

- i) si ce nombre est 1 alors T' est aussi un tore plongé dans $M(T_0)$,
- ii) si ce nombre est strictement plus grand que 1 alors chacune des composantes connexes de T' dans $M(T_0)$ est difféomorphe à un anneau $S^1 \times I$ de telle sorte que $S^1 \times \{0\} \subset T^2 \times \{0\}$ et $S^1 \times \{1\} \subset T^2 \times \{1\}$ ($T^2 \times \{0\}$ et $T^2 \times \{1\}$ étant les deux composantes du bord de $M(T_0) \approx T^2 \times I$).

Démonstration du lemme C.2. : Puisque T est incompressible dans V on peut utiliser les techniques employées dans la démonstration de la proposition B.2.

On commence par éliminer les courbes d'intersections entre T et T_0 (T étant mis en position générale par rapport à T_0) qui sont homotopes à 0.

Puis on élimine, par paires, les courbes d'intersections de signes opposés. A la fin de ce processus on est dans l'une des deux situations suivantes.

a) il n'y a plus aucune intersection entre T et T_0 et on est alors dans la conclusion i).

b) Toutes les intersections sont de mêmes signes. Dans ce cas, si on note $a_1 \cup \dots \cup a_n = T \cap T_0$ indexé de telle façon que l'une des bandes cylindriques définies par a_i et a_{i+1} sur T , soit A_i , ne contient, dans son intérieur, aucun des a_j , alors A_i , dans $M(T_0)$, est l'image d'un plongement de $S^1 \times I$ où $S^1 \times \{0\}$ est envoyé sur $T^2 \times \{0\}$ et $S^1 \times \{1\}$ sur $T^2 \times \{1\}$.

Démonstration du théorème C.1. : Soient $a_1, \dots, a_n$ les cercles d'intersections de T avec $T_0 = T^2 \times \{0\} \subset M(T_0) \approx T^2 \times I$ indexé de telle façon que $a_i \cup a_{i+1}$ borde, dans $T^2 \times \{0\}$, un cylindre E_i dont l'intérieur est disjoint de chaque a_j et $a_{n+1} = a_1$. Les courbes d'intersections $a_1, \dots, a_n$ sont celles données par le lemme C.2. Dans le cas $n = 0$ le théorème C.1 est une application directe de la proposition B.2. et du corollaire B.3. Supposons donc $n \geq 1$. Parallèlement, soient $b_1, \dots, b_n$ les cercles d'intersections de T avec $T^2 \times \{1\} \subset M(T_0)$ indexé de telle façon que $a_i + b_i$ borde un cylindre A_i sur T avec $\text{int } A_i \subset T^2 \times (0,1)$ (l'existence des A_i est également une conséquence du

lemme C.2.). Notons H_i le cylindre sur $T^2 \times \{1\}$ bordé par $b_i + b_{i+1}$ et dont l'intérieur ne contient aucun des b_j . (Dans le cas $n \leq 2$ le choix des E_i et des H_i correspondants est trivialement déterminé par ce qui suit).

$E_i \cup H_i \cup A_i \cup A_{i+1}$ sépare V en deux composantes connexes. Notons par $M(i)$ celle des deux dont l'intérieur est disjoint de $T_0 \subset V$.

Il est facile de voir que $M(i)$ est homéomorphe à $S^1 \times I \times I$ par une application qui envoie $S^1 \times I \times \{0\}$ sur E_i , $S^1 \times I \times \{1\}$ sur H_i , $S^1 \times \{0\} \times I$ sur A_i et $S^1 \times \{1\} \times I$ sur A_{i+1} (Une preuve directe de cette propriété est donnée par des arguments analogues à ceux du corollaire B.3 en utilisant un feuilletage de Reeb ou encore, on peut appliquer les résultats de [28]).

V est l'espace quotient de $T^2 \times I$ où $(x, 1)$ est identifié avec $(F(x), 0)$ pour tout x dans T^2 . T est plongé dans V , donc pour tout i , il existe un indice $\phi(i)$ tel que H_i soit identifié avec $E_{\phi(i)}$ au-dessus de F .

Supposons tout d'abord que $n = 1$. Dans ce cas $M(T)$ ($M(T) = V$ coupé le long de T) est l'espace quotient de $S^1 \times I \times I$ où $(\theta, t, 1)$ est identifié avec $(F_1(\theta, t), 0)$ pour $(\theta, t) \in S^1 \times I$ et où F_1 est le difféomorphisme de $S^1 \times I \rightarrow S^1 \times I$ induit par F .

T ne sépare pas V en deux composantes connexes et T a un fibré normal trivial dans V donc $\partial M(T)$ à deux composantes connexes. Ainsi $F_1(S^1 \times \{0\}) = S^1 \times \{0\}$ et $F_1(S^1 \times \{1\}) = S^1 \times \{1\}$. V étant orientable, F_1 préserve l'orientation comme difféomorphisme de $S^1 \times I \rightarrow S^1 \times I$ donc F_1 est isotope à l'identité. Ainsi donc $M(T)$ est difféomorphe à $S^1 \times I \times S^1 \approx T^2 \times I$ et le résultat est démontré pour le cas $n = 1$.

Supposons maintenant que $n > 1$. Alors $\phi(1) \neq 1$ car si $\phi(1) = 1$ $M(T)$ aurait deux composantes connexes ce qui est en contradiction avec le fait que T ne sépare pas V en deux composantes connexes.

Ainsi $M(1) \bigcup_F M(\psi(1))$ est homéomorphe à $S^1 \times I \times I$ puisque $M(1) \bigcup_F M(\psi(1))$ est obtenu en prenant l'espace quotient de $S^1 \times I \times I + S^1 \times I \times I$ où un point $(x, 1)$ du premier facteur ($x \in S^1 \times I$) est identifié à un point $(F(x), 0)$ du second facteur. Par ailleurs les indices $1, \psi(1), \psi^2(1), \dots, \psi^{n-1}(1)$ sont distincts et $\psi^n(1) = 1$ puisque T ne sépare pas V en deux composantes connexes. Ainsi $M(1) \bigcup_F M(\psi(1)) \bigcup_F \dots \bigcup_F M(\psi^{n-1}(1))$ est homéomorphe à $S^1 \times I \times I$ et $M(T)$ est obtenue comme espace quotient de $S^1 \times I \times I$ où $(x, 1)$ est identifié avec $(h(x), 0)$, $x \in S^1 \times I$ et h étant un difféomorphisme de $S^1 \times I \rightarrow S^1 \times I$. (induit par F).

Comme pour le cas $n = 1$, $h(S^1 \times \{0\}) = S^1 \times \{0\}$ et $h(S^1 \times \{1\}) = S^1 \times \{1\}$ car $\partial M(T)$ a deux composantes connexes. De même h conserve l'orientation puisque $M(T)$ est orientable, donc h est isotope à l'identité et $M(T) \approx T^2 \times I$ ce qui achève la démonstration du théorème C.1.

Exemple C.3.

Pour un fibré orientable $V = T^2 \times I /_F$ particulier, nous donnons ici un exemple de tore plongé incompressible qui sépare la variété V en deux composantes connexes.

On note $J = [-1, +1]$ et on considère $T^2 \times I$ comme l'espace quotient de $S^1 \times I \times J$ où $(\theta, t, -1)$ est identifié avec $(\theta, t, +1)$ ($\theta \in [0, 2\pi]$). Soit F le difféomorphisme linéaire du tore qui renverse l'orientation sur chaque générateur :

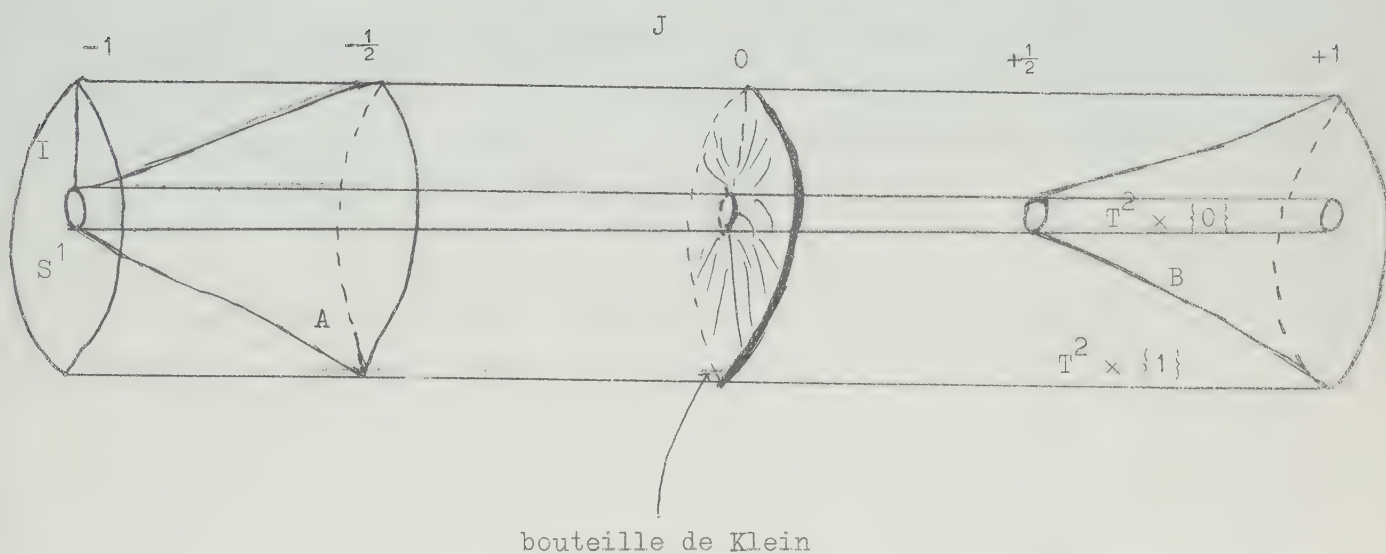
$$F = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) .$$

On considère alors le fibré $V = T^2 \times I /_F$ qui est donc l'espace quotient de $T^2 \times I$ où le point $(\theta, 1, s)$ de $T^2 \times \{1\}$ est identifié avec le point $(-\theta, 0, -s)$ de $T^2 \times \{0\}$.

Dans $T^2 \times I$ on construit les deux sous-variétés A et B suivantes : [fig.1].

A et B sont difféomorphes à un anneau $S^1 \times I$; le bord $S^1 \times \{0\}$ de A est le cercle $S^1 \times \{0\} \times \{-1\}$ et le bord $S^1 \times \{1\}$ de A est le cercle $S^1 \times \{1\} \times \{-\frac{1}{2}\}$; le bord $S^1 \times \{0\}$ de B est le cercle $S^1 \times \{0\} \times \{-\frac{1}{2}\}$ et le bord $S^1 \times \{1\}$ de B est le cercle $S^1 \times \{1\} \times \{1\}$.

$A \cup B \subset T^2 \times I$ devient après passage au quotient dans $T^2 \times I / \mathbb{F}$ un tore plongé (différentiable après lissage) incompressible qui sépare V en deux composantes connexes. Dans chacune de ces composantes, par ailleurs, on peut plonger une bouteille de Klein obtenue par passage au quotient dans V d'un anneau $S^1 \times I$ de $T^2 \times I$ allant de $S^1 \times \{0\} \times \{0\}$ à $S^1 \times \{1\} \times \{0\}$. On verra plus loin qu'un tel plongement du tore n'est jamais une orbite compacte d'une action non dégénérée de $\mathbb{R}^2$ sur V .



[Figure 1]

III.1.D.

PLONGEMENTS INCOMPRESSIBLES DE TORES DANS $V = T^2 \times I / \mathbb{F}$ (suite).

Dans ce paragraphe nous allons préciser la position relative d'un tore incompressible (ne séparant pas V en deux composantes connexes) par rapport aux fibres.

Pour alléger les notations nous utiliserons la définition suivante :

DEFINITION D.0.- Si T est un plongement incompressible du tore dans $V = T^2 \times I/F$ et si T est isotope dans V à la fibre T_0 , on dira que T est parallèle aux fibres de V .

Il est à noter qu'il y a équivalence entre " T parallèle aux fibres" et " T est incompressible et il existe une isotopie de disjonction, dans V , entre T et T_0 ".

Plus précisément on a la proposition suivante :

PROPOSITION D.1.- Soit T un tore plongé dans $T^2 \times I$ tel que, $T \cap \partial(T^2 \times I) = \emptyset$. Les deux conditions suivantes sont équivalentes :

- i) T est incompressible.
- ii) T sépare $T^2 \times I$ en deux composantes connexes, l'une contenant $T^2 \times \{0\}$ et l'autre $T^2 \times \{1\}$.

Démonstration de la proposition B.1. : ii) $\implies$ i)

On suppose que T sépare $T^2 \times I$ en deux composantes connexes A et B telles que $T^2 \times \{0\} \subset A$ et $T^2 \times \{1\} \subset B$.

Soient $i: T \hookrightarrow T^2 \times I$, l'inclusion, et $i_*: \Pi_1(T) \rightarrow \Pi_1(T^2 \times I)$ le morphisme induit par i sur les groupes fondamentaux.

Supposons que i_* ne soit pas injectif, et notons i_1 (resp. i_2) l'inclusion de T dans A (resp. B). On peut remarquer alors (Par Van-Kampen par exemple), que i_{1*} ou i_{2*} n'est pas injectifs.

En appliquant le "Loop Theorem" [25] à $T \in \partial A$ on trouve une courbe simple $C \subset T$, non homotope à 0 sur T et qui borde un disque plongé $D \subset A$. En coupant A le long de D on trouve une variété A' dont le bord est une sphère plongée S . Mais $T^2 \times I$ est une variété irréductible donc S borde une boule E dans $T^2 \times I$. Par construction, la boule E contient $T^2 \times \{0\}$ ou $T^2 \times \{1\}$ ce qui est impossible

donc i_* est injectif et T est incompressible.

i) $\implies$ ii)

Nous allons montrer tout d'abord que tout tore plongé dans $T^2 \times I$ sépare $T^2 \times I$ en deux composantes connexes.

Notons $V = T^2 \times I$ et $K = T \cup T^2 \times \{0\} \cup T^2 \times \{1\}$.

Nous voulons montrer que le rang de $H_0(V - T)$ est 2.

Or : $H_0(V - T) = H_0(V - K)$ et par dualité $H_0(V - K) \simeq H^3(V, K)$

On a la suite exacte :

$$H^2(V) \xrightarrow{\alpha} H^2(K) \xrightarrow{\beta} H^3(V, K) \rightarrow H^3(V) \rightarrow 0$$

et $\partial V \neq \emptyset$ donc $H^3(V) = 0$. D'où la suite exacte

$$H^2(V) \xrightarrow{\alpha} H^2(K) \xrightarrow{\beta} H^3(V, K) \rightarrow 0 \quad (1)$$

Or la suite exacte :

$$H_1(\partial V) \xrightarrow{k} H_1(V) \xrightarrow{s} H_1(V, \partial V) \xrightarrow{i} H_0(\partial V) \xrightarrow{j} H_0(V) \quad (2)$$

où k et j sont injectives et où $\ker j \simeq \mathbb{Z}$ montre que $H_1(V, \partial V) \simeq \mathbb{Z}$ donc $H^2(V) \simeq \mathbb{Z}$ par dualité.

D'après (1) on a donc :

$$\text{rang } H^3(V, K) = 3 - \text{rang}(\text{image } \alpha)$$

et $\text{rang}(\text{image } \alpha) \leq 1$ d'où le résultat.

T sépare donc $T^2 \times I$ en deux composantes connexes A et B . Supposons que A , par exemple, ne contienne ni $T^2 \times \{0\}$ ni $T^2 \times \{1\}$.

On a $\partial A = T$ et d'après la proposition 2.3 de [16] le morphisme

$i_* : H_1(T) \rightarrow H_1(A)$ a un noyau non trivial. Ainsi, un élément non nul de $\Pi_1(T)$

s'envoie par l'inclusion $*$ sur un élément du groupe dérivé (groupe des commutateurs)

de $\Pi_1(A)$. Mais cet élément de $\Pi_1(A)$ est dans la classe nulle dans $\Pi_1(T^2 \times I)$ qui est commutatif. Ceci est en contradiction avec l'hypothèse T est incompressible, donc A et B vérifient les conclusions ii) de la proposition D.1 qui est ainsi démontrée.

La suite de ce paragraphe sera essentiellement consacré à la démonstration du résultat suivant :

THEOREME D.2.- Soit T un plongement incompressible du tore dans $V = T^2 \times I / \mathbb{F}$ qui ne sépare pas V en deux composantes connexes.

Si F n'a pas la valeur propre $+1$ alors T est parallèle aux fibres de V .

Puisque $\det F = 1$, F ne peut avoir, au plus qu'une seule valeur propre qui est soit $+1$ soit -1 (dans $\mathbb{Z}$ bien entendu).

Le théorème D.2. sera une conséquence immédiate des deux propositions suivantes :

PROPOSITION D.3.- Soit T un plongement incompressible du tore dans $V = T^2 \times I / \mathbb{F}$ et qui ne sépare pas V en deux composantes connexes. Si F n'a pas de valeurs propres dans $\mathbb{Z}$, T est parallèle aux fibres de V .

PROPOSITION D.4.- Soit T un plongement incompressible du tore dans $V = T^2 \times I / \mathbb{F}$ et qui ne sépare pas V en deux composantes connexes. Si F a -1 comme valeur propre T est parallèle aux fibres de V .

Démonstration de la proposition D.3. : Supposons, au contraire, que T n'est pas parallèle aux fibres de V donc que T n'est pas isotope à T_0 . Comme dans le paragraphe III.1.C (démonstration du théorème C.1) nous mettons T en position générale par rapport à T_0 . Il est clair, d'après les remarques faites précédemment, (et d'après la proposition D.1), que T n'est pas disjoint de T_0 . Comme précé-

demment nous éliminons, par isotopie dans V , les intersections entre T et T_0 , qui sont homotopes à 0, puis les intersections de type c_i , c_{i+1} qui sont de signes opposés.

Dans $M(T_0) \approx T^2 \times I$ nous sommes finalement dans la situation suivante :

$$T \cap (T^2 \times \{0\}) = a_1 \cup \dots \cup a_n \quad \text{et}$$

$$T \cap (T^2 \times \{1\}) = b_1 \cup \dots \cup b_n$$

où $a_i + b_i$ borde un cylindre A_i dans T dont l'intérieur est contenu dans l'intérieur de $M(T_0)$.

Par construction $F(b_1) = a_j$ pour un certain j , $1 \leq j \leq n$.

Le cylindre A_1 est isotope au cylindre $a_1 \times I$ dans $T^2 \times I$; cela se voit facilement en utilisant, par exemple, la théorie des feuilletages de Reeb.

Ainsi, et sur T^2 ($F \in \text{Diff}^+(T^2)$), a_1 est isotope à b_1 donc $F(a_1)$ est isotope à a_1 sur T^2 . Soit c une courbe fermée simple, linéaire, sur T^2 qui passe par le point base $(0,0)$ de T^2 et qui est isotope à a_1 . $F(c)$ est isotope à c . Soit f un difféomorphisme de $T^2 \rightarrow T^2$ tel que $f(F(c)) = c$, $f(0,0) = (0,0)$ et f isotope à l'identité. On a alors, pour les applications induites sur les groupes fondamentaux : $(f \circ F)_* = F_*$ et $(f \circ F)_*[c] = \pm [c]$ où $[c]$ désigne la classe de c dans $\Pi_1(T^2)$. Ceci prouve que F a une valeur propre ce qui est contraire à l'hypothèse.

Démonstration de la proposition D.4. : Supposons que T n'est pas parallèle aux fibres, donc, que T n'est pas isotope à T_0 ou encore qu'on ne peut pas, par une isotopie, disjoindre T de T_0 . Comme dans C.1. ou D.3 nous mettons T en position générale par rapport à T_0 de telle sorte que $T \cap T_0 = a_1 \cup \dots \cup a_n$ ($a_1, \dots, a_n$ sont des intersections de même signe et les intersections homotopes à 0 ont

été éliminées par isotopie).

Soit a la classe d'homotopie de a_1 dans $\Pi_1(T_0)$ et soit $b \in \Pi_1(T_0)$ tel que a et b forment une base de $\Pi_1(T_0)$. Soit c le troisième générateur de $\Pi_1(V)$ défini dans le paragraphe III.1.A.

$\Pi_1(V)$ a une présentation finie : c'est le groupe engendré par les trois générateurs a, b et c avec les relations :

$$ab = ba \quad (1)$$

$$cac^{-1} = a^{-1} \quad (2)$$

$$cbc^{-1} = a^{\alpha} b^{-1} \quad (3)$$

(2) et (3) sont conséquence de l'hypothèse que F admet -1 comme valeur propre et que $\det F = 1$ i.e. : sur la base (a, b) la matrice représentant F est du type $\begin{pmatrix} -1 & \alpha \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

$a \in \Pi_1(V)$ est la classe d'homotopie des courbes d'intersections de T avec T_0 , donc nous pouvons prendre $a \in \Pi_1(T)$, comme premier générateur de $\Pi_1(T) \subset \Pi_1(V)$ (Il faut voir $\Pi_1(T) \subset \Pi_1(V)$ comme $i_*(\Pi_1(T)) \subset \Pi_1(V)$ où $i : T \hookrightarrow V$ est l'inclusion de T dans V).

$\Pi_1(V)$ a une structure de produit semi-directe de groupe invariant (a, b) , donc un deuxième générateur quelconque de $\Pi_1(T)$ sera du type $a^{k_1} b^{k_2} c^{k_3}$. D'après une propriété bien connue sur les $\mathbb{Z}$ -modules, on peut en fait choisir ce deuxième générateur comme étant $b^m c^\gamma$, ($k_1 = 0$, $k_2 = m$, $k_3 = \gamma \geq 0$).

Puisque T ne sépare pas V en deux composantes connexes, nous savons, d'après le théorème C.1 que $M(T)$ est difféomorphe à $T^2 \times I$ et donc que T est une fibre d'une structure fibrée de V sur S^1 .

D'après la suite exacte d'homotopie associée à cette fibration $\Pi_1(T)$ est un sous-groupe invariant dans $\Pi_1(V)$ et de quotient $\mathbb{Z}$.

Si $\Pi_1(T)$ est engendré par a et $b^m c^\gamma$ avec $m \neq 1$ et $\gamma \neq 0$ nous allons obtenir une contradiction en supposant que $\Pi_1(T)$ est invariant et de quotient $\mathbb{Z}$ dans $\Pi_1(V)$.

Remarquons tout d'abord que γ est pair car a et $b^m c^\gamma$ commutent ($\Pi_1(T)$ est abélien) donc a et c^γ commutent.

$$1^\circ) \quad \underline{a \in \Pi_1(T)}$$

2°) $\underline{b^{2m} \in \Pi_1(T)}$. En effet, si $\Pi_1(T)$ est invariant dans $\Pi_1(V)$ on a $cb^m c^\gamma c^{-1} \in \Pi_1(T)$. Or $cb^m c^\gamma c^{-1} = a^{\alpha m} b^{-m} c^\gamma$ donc $b^{-m} c^\gamma \in \Pi_1(T)$ et $b^{2m} = b^m c^\gamma (b^{-m} c^\gamma)^{-1}$.

3°) $\underline{c^{2\gamma} \in \Pi_1(T)}$. En effet, d'après 2°), $(b^m c^\gamma)(b^{-m} c^\gamma) \in \Pi_1(T)$. Or $b^m c^\gamma b^{-m} c^\gamma = a^{\alpha m \gamma} c^{2\gamma}$ puisque γ est pair.

D'après 1°) 2°) et 3°) si $m \neq 0$ et $\gamma \neq 0$ le quotient de $\Pi_1(V)$ par $\Pi_1(T)$ est un groupe fini et n'est pas isomorphe à $\mathbb{Z}$.

Si $\gamma \neq 0$ et $m = 0$, le quotient $\Pi_1(V)/\Pi_1(T)$ étant $\mathbb{Z}$, on a $\gamma = 1$ ce qui est impossible (a et c ne commutent pas).

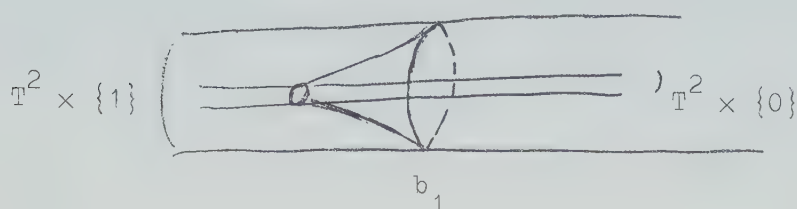
Enfin, dans le cas $m = 1$ et $\gamma = 0$ $\Pi_1(T)$ est engendré par (a, b) et d'après la proposition B.2 T est isotope à T_0 ce qui contredit nos hypothèses.

Remarques et exemples :

1°) Donnons tout d'abord un exemple (trivial) d'un tore incompressible qui ne sépare pas $V = T^2 \times I/F$ en deux composantes connexes et qui n'est pas parallèle aux fibres dans le cas où F à $+1$ comme valeur propre :

Considérons $M(T_0) \approx T^2 \times I$ et soit $a \in \Pi_1(T^2 \times \{0\})$ un générateur tel que $F(a)$ et a soient isotopes sur T^2 . Si a_1 est un représentant de a sur $T^2 \times \{0\}$ il existe un lacet b_1 , isotope à a_1 dans $T^2 \times I$ et tel que a_1 soit

identifié avec b_1 quand on passe au quotient par F . Dans $T^2 \times I$, un anneau $S^1 \times I$ tel que $S^1 \times \{0\} = a_1$ et $S^1 \times \{1\} = b_1$ deviendra, après passage au quotient par F , un tore incompressible dans V (différentiable après lissage) non parallèle aux fibres et qui ne sépare pas V en deux composantes connexes. [fig.1].



(figure 1)

2°) Dans le cas où F n'admet pas $+1$ comme valeur propre il est à noter que la structure fibrée de V est rigide dans le sens suivant : Il est pratiquement évident, d'après le théorème D.2., que dans ce cas V n'admet qu'une seule structure comme fibré sur S^1 (de fibre T^2) (à isomorphisme près (voir remarque C.2.)) puisqu'une fibre quelconque d'une fibration de V sur S^1 (de fibre T^2) sera en fait l'image d'un plongement incompressible du tore ne séparant pas V en deux composantes connexes.

3°) Dans le cas où F à 1 comme valeur propre considérons T un tore incompressible dans V , ne séparant pas V en deux composantes connexes et non parallèle aux fibres de $V = T^2 \times I / F$. Comme dans C.1. ou D.3. on peut prendre T tel que $T \cap T_0 = a_1 \cup \dots \cup a_n$ où les a_i sont des intersections de même signe. Si a est la classe "d'isotopie" des a_i on sait, d'après la proposition D.3 que a est "vecteur propre" de F et aussi, d'après la proposition D.4, qu'il existe deux entiers m et γ ($\gamma > 0$) tel que a et $b^m c^\gamma$ forment une base de $\Pi_1(T)$. (Les notations sont les mêmes que dans la démonstration de la proposition D.4). On peut alors montrer que $n = \gamma$;

En effet, soit α un lacet dans T (passant par le point base) qui coupe chacun des a_i , $i \in (1, \dots, n)$, en un point et un seul. On peut construire α de façon

à ce qu'il ait une décomposition nulle sur a dans $\Pi_1(V)$ (on peut, par exemple, construire α par "morceaux" successifs, dans $T^2 \times I$, sur les anneaux A_i définis dans la démonstration du théorème C.1.), mais ce qui nous importe est que a et α forment une base de $\Pi_1(T)$. Ainsi α (resp. α^{-1}) s'écrit $b^{m'}c^{\gamma'}$ (resp. $a^{n''}b^{m''}c^{\gamma''}$) avec $\gamma' = -\gamma''$ donc γ' ou γ'' est positif. D'après une propriété bien connue dans les produits semi-directes (unicité de l'écriture $a^{k_1}b^{k_2}c^{k_3}$ pour un élément de $\Pi_1(V)$), on a $\gamma = |\gamma'|$.

On peut supposer, par exemple, que $\gamma' > 0$ donc que $\gamma = \gamma'$. En calculant, dans $H^3(V, \mathbb{Z})$, l'intersection homologique de la courbe α avec le tore T_0 on trouve le nombre γ en remarquant que le groupe dérivé $[\Pi_1(V), \Pi_1(V)]$ est tout entier contenu dans le facteur invariant du produit semi-directe $\Pi_1(V)$ représenté par $\Pi_1(T_0) = (a, b)$. Et donc, puisque l'intersection homologique de b avec T_0 est nulle, le calcul de l'intersection homologique de α avec T_0 se réduit à

$$\gamma [c]^* \bigcup_{\text{sup}} [T_0]^* = \gamma \in H^3(V, \mathbb{Z})$$

où $[c]^*$ est la classe duale de $[c] \in H_1(V, \mathbb{Z})$ et $[T_0]^*$ la classe duale de $[T_0]$.

L'interprétation géométrique de la relation $n = \gamma$ est que chacun des anneaux A_i , définis dans le théorème C.1, apporte une contribution de ± 1 sur le générateur c dans la décomposition sur a, b et c d'un générateur du type α de $\Pi_1(T)$.

III.2.

QUELQUES PROPRIETES DES ACTIONS DE $\mathbb{R}^2$ SUR LES VARIETES FERMEES ORIENTABLES DE DIMENSION 3.— Dans ce paragraphe nous allons rattacher l'étude des tores incompressibles plongés dans $V = T^2 \times I/\mathbb{F}$ (§III.1) à l'étude des orbites compactes d'actions non dégénérées de $\mathbb{R}^2$ sur V .

THEOREME 2.1.- Soit Φ une action non dégénérée de $\mathbb{R}^2$ sur $V = T^2 \times I/F$ et supposons que Φ admette une orbite compacte T . Alors T est un plongement incompressible du tore dans V qui ne sépare pas V en deux composantes connexes.

Démonstration du théorème 2.1. : Désignons par $\mathcal{F}(\Phi)$ le feuilletage de V associé à Φ . On remarque, tout d'abord, que $\mathcal{F}(\Phi)$ ne contient aucune composante de Reeb, i.e. : une sous-variété de V invariante par Φ , homéomorphe à $D^2 \times S^1$ et telle que $\partial(D^2 \times S^1)$ soit une feuille. Cela résulte du fait que $D^2 \times S^1$ est de rang 1 [6]. On sait par ailleurs (conséquence d'un théorème de Novikov [7], [16]) que si $\mathcal{F}$ est un feuilletage transversalement orientable d'une variété fermée de dimension 3, sans composante de Reeb, alors chaque feuille de $\mathcal{F}$ est incompressible dans la variété.

Ainsi, si T est une orbite compacte de Φ , T est incompressible dans V .

D'autre part, si T séparerait V en deux composantes connexes A et B , chacune de ces composantes serait munie d'une action non dégénérée de $\mathbb{R}^2$ (l'action induite par Φ). Or A et B n'ont qu'une composante connexe dans leur bord, qui est difféomorphe au tore T^2 et ceci est en contradiction avec le théorème II.3.5 (Partie II).

THEOREME 2.2.- Soit $V = T^2 \times I/F$. Si F n'a pas la valeur propre +1 toutes les actions non dégénérées de $\mathbb{R}^2$ sur V admettent des orbites compactes qui sont toutes isotopes à T_0 (une fibre de V) et donc parallèles aux fibres de V .

Démonstration du théorème 2.2. : Supposons, au contraire, que V soit munie d'une action Φ , non dégénérée, de $\mathbb{R}^2$ sur V sans orbites compactes. D'après un théorème de Sacksteder [22] on sait alors que toutes les orbites sont partout denses et homéomorphes entre elles. Ainsi toutes les orbites de Φ sont cylindriques et denses, car si elles étaient planes V serait difféomorphe à T^3 [15] ce qui est

contraire à l'hypothèse faite sur F .

D'autre part on peut supposer T_0 transverse au feuilletage $\mathcal{F}(\Phi)$ car, d'après le théorème 1 de [20] T_0 est isotope, dans V , à un tore plongé transverse à $\mathcal{F}(\Phi)$. Il est alors clair que les orbites de Φ dans $M(T_0)$ sont des cylindres ayant un bord dans $T^2 \times \{0\}$ et l'autre dans $T^2 \times \{1\}$. Cette situation est explicitement décrite dans la proposition D.3. (§III.1.D) et elle conduit à la conclusion que F a des valeurs propres dans $\mathbb{Z}$ ($+1$ ou -1). Ceci démontre donc que si F n'a pas de valeur propre dans $\mathbb{Z}$ toutes les actions de $\mathbb{R}^2$ sur $V = T^2 \times I/F$ admettent des orbites compactes (une au moins) et elles sont parallèles aux fibres d'après le théorème D.2 (§III.1.D).

Supposons maintenant que Φ n'a pas d'orbites compactes et que F a -1 comme valeur propre.

a) Soient deux champs de vecteurs X et Y qui commutent, qui sont linéairement indépendants, et qui sont tangents aux orbites de Φ . On peut choisir Y de telle sorte que toutes les orbites de Y soient périodiques (orbites fermées) et de période 1. [Voir Partie I et II]. Soit c une orbite de Y et L l'orbite de Φ passant par c . Soit A un anneau $(S^1 \times I)$, transverse à $\mathcal{F}(\Phi)$, qui est l'union d'orbites de Y et tel que $c \subset \text{int } A$ [Partie I].

On sait (toujours d'après la Partie I) que $(L - c) \cap A \neq \emptyset$. Soit D le premier "retour" de L dans A , i.e. : $D \subset L \cap A$ et $D + c$ borde un cylindre $E \subset L$ tel que $(\text{int } E) \cap A = \emptyset$. Soit B le cylindre sur A bordé par $c + D$. On sait alors lisser, dans un voisinage de A , le tore topologique $E \cup B$ pour obtenir un tore T orbite compacte d'une action non dégénérée ψ de $\mathbb{R}^2$ sur V (Partie I ou théorème 3.1 de [18]).

D'après le théorème 2.1 (§III.2) et le théorème D.2 (§III.1.D) on sait que T est parallèle aux fibres de V ou encore que T est isotope à T_0 .

b) Par ailleurs, on peut se servir de la construction explicitée dans le lemme II.2.4 (§II.2) pour montrer que T est isotope, dans V , à un tore T' tel que le champ X soit transverse à T' et le champ Y soit tangent à T' . (Pour cela il suffit de prendre T' comme étant l'union de $M(\theta_0)$ défini dans le lemme II.2.4, saturé par les orbites de Y , avec l'anneau dans $A(c)$ bordé par

$$S^1 \times I \times \{0\} + S^1 \times I \times \{1\}.$$

Ainsi, d'après la partie a) de cette démonstration, on peut supposer que X est transverse à T_0 et que Y est tangent à T_0 .

Soit alors le tore T obtenue en lissant le tore topologique $E \cup B$, où $c \in T_0$ et E et B sont définis comme dans la partie a).

T_0 est transverse à $\mathcal{F}(\Phi)$ donc chaque orbite de Φ , dans $M(T_0)$ est réunion de cylindres ayant un bord dans $T^2 \times \{0\}$ et l'autre dans $T^2 \times \{1\}$.

Donc $\Pi_1(T)$ contient un élément du type $b^m c^\gamma$ (§III.1.D) où $\gamma + 1$ est égal au nombre de cercles dans $E \cap T_0$ donc $\gamma > 0$ (le nombre des cercles d'intersection est au moins 2)). Ainsi $\Pi_1(T) \neq \Pi_1(T_0)$ ce qui est contradictoire avec le fait, démontré en a), que T est isotope à T_0 (T étant une orbite compacte d'une action non dégénérée ψ de $\mathbb{R}^2$ sur V).

En conclusion Φ a au moins une orbite compacte et toutes les orbites compactes de Φ sont parallèles aux fibres d'après les théorèmes 2.1 (§ III.2) et D.2 (§III.1.D).

Remarque 2.3. : Il est à noter que, d'une manière générale, les orbites compactes d'une action Φ , non dégénérée, de $\mathbb{R}^2$ sur $V = T^2 \times I/\mathbb{F}$ sont toutes isotopes entre elles. En effet, si T est une orbite $M(T)$ est difféomorphe à $T^2 \times I$ (Théorème 2.1) et toutes les autres orbites compactes de Φ induisent des plongements incompressibles du tore dans $T^2 \times I$. D'après la proposition D.1 (§III.1.D) et le

corollaire B.3 (§III.1.B) ces plongements sont tous isotopes entre eux et isotope à $T = T^2 \times \{0\} \subset M(T)$.

Exemple 2.4. : Nous donnons ici un exemple d'action non dégénérée de $\mathbb{R}^2$ sur $V = T^2 \times I/F$, où F a la valeur propre $+1$, dont toutes les orbites sont cylindriques et partout denses ce qui complète le théorème 2.2.

On considère $T^2 = S^1 \times S^1$, $V = T^2 \times I/F$ où F est induit par un difféomorphisme linéaire dont le vecteur propre de valeur propre 1 correspond à

$$S^1 \times \{0\} \subset T^2.$$

La linéarité de F donne alors $F(S^1 \times \{t\}) = S^1 \times \{t\}$ (S^1 est paramétré par $t \in [0,1]$). Ainsi la restriction de F à $S^1 \times \{t\}$ correspond à une rotation du cercle.

Désignons par r_α la "rotation d'angle α " de T^2 , i.e ; le difféomorphisme de T^2 , isotope à l'identité, qui est l'identité sur le premier facteur de $S^1 \times S^1$ et qui est la rotation "d'angle" α sur le deuxième facteur

$$(r_\alpha(s,t) = (s, t + \alpha)).$$

Soit $\mathcal{F}_1$ le feuilletage de $T^2 \times I$ dont les feuilles sont les anneaux $S^1 \times \{t\} \times I$. Il est clair qu'à $\mathcal{F}_1$ on peut faire correspondre une action Φ_1 de $\mathbb{R}^2$ sur $T^2 \times I$ dont les orbites sont les feuilles de $\mathcal{F}_1$.

Pour un α irrationnel on pose $F_\alpha = r_\alpha \circ F$. F_α et F sont isotopes donc $V_\alpha = T^2 \times I/F_\alpha$ et $V = T^2 \times I/F$ sont isomorphes. L'action Φ_1 passe au quotient par F_α pour donner une action Φ de $\mathbb{R}^2$ sur V_α dont toutes les orbites sont cylindriques et partout denses (une construction explicite sera faite en III.3.0).

III.3.

LES THEOREMES DE CLASSIFICATION. - Rappelons tout d'abord qu'étant donnée deux actions Φ et ψ , non dégénérées, de $\mathbb{R}^2$ sur une variété V , si $\mathcal{F}(\Phi)$ et $\mathcal{F}(\psi)$ sont les feuilletages de V respectivement associés à Φ et ψ , on dit que Φ et ψ sont équivalents s'il existe un homéomorphisme $H : V \rightarrow V$ qui envoie les feuilles de $\mathcal{F}(\Phi)$ sur les feuilles de $\mathcal{F}(\psi)$.

Dans la première partie de ce paragraphe nous allons nous occuper d'action de $\mathbb{R}^2$ sur $V = \mathbb{T}^2 \times \mathbb{I}/\mathbb{F}$ sans orbite compacte et dont toutes les orbites sont cylindriques (Le cas où toutes les orbites sont planes est traité dans [17]).

Il est intéressant, à ce propos, de donner quelques exemples, de telles actions, précisant, par un calcul explicite, l'exemple III.2.4.

III.3.0.

Exemples : Soit $F \in \text{Diff}^+(T^2)$ un difféomorphisme linéaire du tore ayant $+1$ comme valeur propre (Théorème III.2.2).

Soit $r_\alpha \in \text{Diff}^+(T^2)$ défini par $r_\alpha(x, y) = (x, y + \alpha)$ où α est irrationnel.

On considère la variété $V = T^2 \times \mathbb{I}/r_\alpha F$ comme la variété $V = T^2 \times \mathbb{R}/r_\alpha F$, quotient de $T^2 \times \mathbb{R}$ par la relation $(x, y, \lambda) \sim (r_\alpha F(x, y), \lambda - 1)$ où $(x, y) \in T^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

L'action Φ de $\mathbb{R}^2$ sur V dans l'exemple III.2.4 s'obtient par passage au quotient de l'action Φ' de $\mathbb{R}^2$ sur $T^2 \times \mathbb{R}$ définie par :

$$\Phi'(s, t)(x, y, \lambda) = (x + s, y, \lambda + t).$$

$(\mathcal{F}(\Phi'))$ est constitué par les produits $S^1 \times \{y\} \times \mathbb{R}$ et, α étant irrationnel, les feuilles de $\mathcal{F}(\Phi)$ sont toutes cylindriques et partout denses).

Il est alors naturel d'essayer de construire une action de même type en partant

de la variété $V' = T^2 \times \mathbb{R}/F = T^2 \times I/F$. Les feuilles de $\mathcal{F}(\Phi')$ sur $T^2 \times \mathbb{R}$ seraient alors des cylindres ayant une "pente" α , irrationnel, par rapport au facteur $T^2 \times \{0\}$.

Les difféomorphismes r_α^F et F sont isotopes donc les variétés $V = T^2 \times \mathbb{R}/r_\alpha^F$ et $V' = T^2 \times \mathbb{R}/F$ sont difféomorphes (et isomorphes en tant que fibrés). Soit $\mu : V \rightarrow V'$ un difféomorphisme et soit Φ l'action de $\mathbb{R}^2$ sur V définie plus haut. Il est clair que $\phi_{s,t} = \mu \Phi_{s,t} \mu^{-1}$ est une action non dégénérée de $\mathbb{R}^2$ sur V' et que, par construction ϕ et Φ sont équivalentes.

Posons $F(x,y) = (x + ky, y)$ pour $(x,y) \in T^2$ et, pour $\lambda \in \mathbb{R}$, notons E_λ la partie entière de λ (Pour des raisons évidentes de recollement, qui apparaiteront plus loin, il sera équivalent, pour $\lambda = n$ un entier, de prendre $E_n = n$ ou $E_n = n - 1$) .

On note :
$$H_\lambda = (\lambda - E_\lambda) (1 + E_\lambda) + \frac{E_\lambda(E_\lambda + 1)}{2}$$

Le calcul donne pour le difféomorphisme μ (qui envoie fibre sur fibre) :

$$\mu(x,y,\lambda) = (x - k\alpha H_\lambda , y + \lambda\alpha , \lambda) ,$$

et l'action ϕ de $\mathbb{R}^2$ sur V' est alors définie par :

$$\phi_{(s,t)}(x,y,\lambda) = (x + s + k\alpha (H_\lambda - H_{\lambda+t}) , y + \alpha t , \lambda + t) .$$

On peut, d'une manière analogue, construire des actions du type précédent sur $V = T^2 \times I/f$ pour un f quelconque appartenant à la classe d'isotopie de F mais il serait intéressant d'obtenir des actions définies par des formules plus simples que l'action ci-dessus.

THEOREME 3.1.- Soit Φ une action de $\mathbb{R}^2$ sur une variété V fermée orientable de dimension 3. Si Φ n'a pas d'orbite compacte et si Φ admet une orbite non plane, alors toutes les orbites de Φ sont cylindriques (et denses) et Φ est équivalente à la suspension d'une action non dégénérée de S^1 sur T^2 .

Démonstration du théorème 3.1. : Si $V = T^2 \times I/F$, on sait, d'après le théorème III.2.2 que F admet $+1$ comme valeur propre, Φ n'ayant pas d'orbites compactes. Le fait que toutes les orbites de Φ soient cylindriques et denses est une conséquence directe d'un théorème de Sacksteder [22].

Après avoir composé Φ avec un difféomorphisme de V , on peut supposer que Φ est transverse à T_0 et que les orbites de Φ dans $M(T_0)$ sont homéomorphes à $S^1 \times I$ où $S^1 \times \{0\} \in T_0$ et $S^1 \times \{1\} \in T_1$ (voir la démonstration du théorème III.2.2 avec $T_0 \cup T_1 = \partial M(T_0)$).

Soit $\mathcal{F}_0$ le feuilletage de $M(T_0) \approx T^2 \times I$ induit par les orbites de Φ . $\mathcal{F}_0$ n'a pas d'holonomie car $\mathcal{F}_0 \cap (T_0 = T^2 \times \{0\})$ est topologiquement équivalent au feuilletage de T^2 donné par $S^1 \times \{\theta\}$ où $\theta \in S^1$.

On peut donc appliquer le théorème de stabilité de Reeb [11] et dire que $\mathcal{F}_0$ est topologiquement équivalent au feuilletage $S^1 \times \{\theta\} \times I$ de $T^2 \times I$.

V est alors homéomorphe à $T^2 \times I/H$ où H est un difféomorphisme de T^2 qui laisse invariant le feuilletage $S^1 \times \{\theta\}$. La variété $T^2 \times I/H$ est feuilletée par les cylindres $p(S^1 \times \{\theta\} \times I)$ où $p : T^2 \times I \rightarrow T^2 \times I/H$ est la projection naturelle et ainsi le feuilletage de V associé à Φ est topologiquement équivalent à cette suspension.

III.3.2.

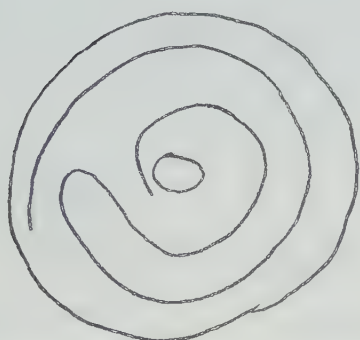
LES MODELES.- Dans ce paragraphe nous allons traiter des classes d'équivalences d'actions ayant des orbites compactes.

Pour expliciter les résultats il nous faut d'abord décrire un certain nombre de modèles standards de feuilletages associés à des actions.

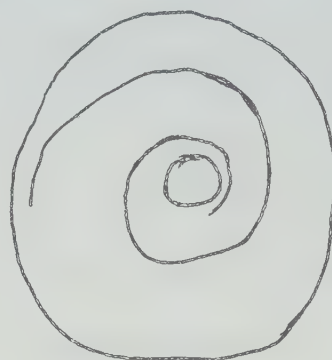
Soit Φ une action non dégénérée de $\mathbb{R}^2$ sur V (fermée orientable de dimension 3) ayant une orbite compacte T . D'après les théorèmes C.1 (§III.1) et III.2.1 nous savons que V coupé le long de T est difféomorphe à $T^2 \times I$. Ainsi, le problème est ramené à la classification des feuilletages de $T^2 \times I$ induits par des

actions non dégénérées de $\mathbb{R}^2$ tangents au bord.

Soit $\mathcal{F}$ le feuilletage de $\mathbb{T}^2 \times I$ induit par Φ . Le type de classification que nous allons obtenir est analogue à la classification des feuilletages de $S^1 \times I$ tangents au bord. Pour ces derniers, en effet, chaque feuille compacte est un cercle isotope au facteur $S^1 \times \{0\}$ et le complémentaire de l'ensemble (compact) des feuilles compactes est une réunion dénombrable d'ouverts connexes W_i avec $\bar{W}_i \approx S^1 \times I$ et le feuilletage à l'intérieur d'un $\bar{W}_i$ est du type 0 ou du type 1 de la figure 1 ci-dessous.



type 0



type 1

Figure 1.

III.3.2.1.

DEFINITION DE $\mathcal{F}(\alpha, 0)$ et $\mathcal{F}(c, 0)$. - Soient X, Y et Z les trois champs définis sur $\mathbb{R}^2 \times I$:

$$X = (\cos \Pi x, 0, \sin \Pi(1 - x))$$

$$Y = (1, \alpha, 0)$$

$$Z = (0, 1, 0)$$

où α est irrationnel et $0 \leq x \leq 1$. (On peut remarquer que les courbes intégrales de X sont du type 0 de la figure 1).

Ces champs sont deux à deux linéairement indépendants et commutent. De plus ils

sont invariants par les translations de $\mathbb{R}^2 : (x_1, x_2) \mapsto (x_1 + 1, x_2)$ et $(x_1, x_2) \mapsto (x_1, x_2 + 1)$.

Ainsi (X, Y) et (X, Z) définissent des actions de $\mathbb{R}^2$ sur $T^2 \times I$. Il est clair que $T^2 \times \{0\}$ et $T^2 \times \{1\}$ sont les seules orbites compactes de ces actions. Les autres orbites sont planes pour (X, Y) et cylindriques pour (X, Z) . Il faut de plus noter qu'aucune transversale aux feuilletages définies par ces actions ne joint $T^2 \times \{0\}$ à $T^2 \times \{1\}$. On désignera par $\mathcal{F}(\alpha, 0)$ et $\mathcal{F}(C, 0)$ les feuilletages respectivement associés aux actions définies par (X, Y) et (X, Z) .

III.3.2.2.

DEFINITION DE $\mathcal{F}(\chi)$. - Soit G le groupe des difféomorphismes de $I = [0, 1]$ laissant 0 et 1 invariants. Soit χ une représentation de $\Pi_1(T^2)$ dans G . Nous allons associer (canoniquement) une action de $\mathbb{R}^2$ sur $T^2 \times I$ à la représentation χ .

Soient f et g les images par χ de la base standard de T^2 . On note alors que $T^2 \times I$ est difféomorphe au quotient de $I \times I \times I$ où $(x, 0, \lambda)$ est identifié avec $(x, 1, g(\lambda))$ et $(0, y, \lambda)$ est identifié avec $(1, y, f(\lambda))$. Puisque f et g commutent, les champs $(1, 0, 0)$ et $(0, 1, 0)$ définis sur $I \times I \times I$ passent au quotient dans $T^2 \times I$ et y induisent une action de $\mathbb{R}^2$ dont le feuilletage associé est noté par $\mathcal{F}(\chi)$.

Par constructions, l'holonomie de ce feuilletage au dessus de la feuille $T^2 \times \{0\}$ est précisément donné par χ . De plus $\mathcal{F}(\chi)$ est transverse aux segments $\{0\} \times \{0'\} \times I$ et il peut admettre des feuilles compactes dans $\text{int } T^2 \times I$.

Enfin, on peut considérer le feuilletage $\mathcal{F}(\chi)$ comme le feuilletage canoniquement associé à la fibration $(T^2 \times I, I, T^2, G)$ de base I , de fibre T^2 et de groupe structural G munie de la topologie discrète [3], [17]. On sait que si

$\mathcal{F}(\chi_1)$ et $\mathcal{F}(\chi_2)$ sont deux feuilletages de ce type ils sont équivalents si, et seulement si, χ_1 et χ_2 sont des représentations conjugués.

III.3.2.3.

DEFINITION DE $\mathcal{F}[(1,i_1), (2,i_2), \dots, (n,i_n)]$. - $\mathcal{F}[(1,i_1), (2,i_2), \dots, (n,i_n)]$ est un feuilletage de $T^2 \times I$ obtenu en recollant des exemplaires des modèles décrits en 3.2.1 et 3.2.2. Pour tout $1 \leq k \leq n$ on a $i_k = 0$ ou 1 . Pour $i_k = 1$ et une représentation χ_k de $\Pi_1(T^2)$ dans G on définit $\mathcal{F}(k, i_k) = \mathcal{F}(\chi_k)$ (le feuilletage défini en 3.2.2). Pour $i_k = 0$ on définit $\mathcal{F}(k, i_k)$ comme $\mathcal{F}(\alpha, 0)$ ou $\mathcal{F}(C, 0)$ (les feuilletages définis en 3.2.1).

$\mathcal{F}[(1,i_1), (2,i_2), \dots, (n,i_n)]$ est alors obtenu en recollant la feuille $T^2 \times \{1\}$ de $\mathcal{F}(k, i_k)$ avec la feuille $T^2 \times \{0\}$ de $\mathcal{F}(k+1, i_{k+1})$ pour $1 \leq k \leq n-1$.

Il faut remarquer que pour $i_k = 0$, il n'existe pas de chemin transverse au feuilletage $\mathcal{F}(k, i_k)$ et allant de la feuille $T^2 \times \{0\}$ à la feuille $T^2 \times \{1\}$; alors que pour $i_k = 1$, les segments $(\{0\} \times \{0'\}) \times I$ sont transverses au feuilletage $\mathcal{F}(k, i_k)$.

THEOREME 3.3. - Soit Φ une action non dégénérée de $\mathbb{R}^2$ sur $T^2 \times I$ telle que $T^2 \times \{0\}$ et $T^2 \times \{1\}$ soient des orbites de Φ . Alors $\mathcal{F}(\Phi)$ est équivalent à $\mathcal{F}[(1,i_1), (2,i_2), \dots, (n,i_n)]$ pour un certain choix des $\mathcal{F}(k, i_k)$ $1 \leq k \leq n$.

Avant de démontrer le théorème 3.3 nous aurons besoin d'un certain nombre de lemmes.

LEMME 3.4. (Nancy-Kopell [4]). - Soient f et g des germes de difféomorphismes de classe C^2 de $\mathbb{R}^+$ ($\{x > 0\}$) tels que $fg = gf$, $f(0) = g(0) = 0$ et $g \neq \text{id}$. Alors, si f est une contradiction (i.e. : $f(x) < x \quad \forall x > 0$), 0

est le seul point fixe de g .

LEMME 3.5.- Soit Φ une action non dégénérée de $\mathbb{R}^2$ sur $T^2 \times I$ telle que $T^2 \times \{0\}$ et $T^2 \times \{1\}$ soient les seules orbites compactes de Φ .

Alors il existe deux tores plongés T' et T'' satisfaisant aux conditions :

- a) T' et T'' sont transverses au feuilletage $\mathcal{F}_e(\Phi)$,
- * b) T' est isotope à $T^2 \times \{0\}$ et peut être choisi à l'intérieur de n'importe quel voisinage collier de $T^2 \times \{0\}$. En outre on peut supposer que les segments $(\{0\} \times \{0'\}) \times I$ sont transverse au feuilletage $\mathcal{F}_e(\Phi)$ à l'intérieur de la région U' bordée par $T^2 \times \{0\}$ et T' .

Les mêmes propriétés sont vraies pour le couple $(T'', T^2 \times \{1\})$, et la région U'' bordée par $T^2 \times \{1\}$ et T'' ,

- c) Si L est une orbite de Φ , $L \cap T'$ (resp. $L \cap T''$) est un cercle si $L \approx S^1 \times \mathbb{R}$ ou une réunion de copies de $\mathbb{R}$ si $L \approx \mathbb{R}^2$.

- d) Il existe un champ de vecteur Y tangent aux orbites ouvertes de Φ tel que, si l'on désigne par $Y(x,t)$ la courbe intégrale de Y au temps t qui passe par x au temps $t = 0$, on ait $Y(T', (-\infty, 0)) \subset U'$, $Y(T'', (1, \infty)) \subset U''$ et $Y(T', 1) = T''$. Ainsi le champ Y conjugue les feuilletages sur T' et T'' induit par $\mathcal{F}_e(\Phi)$.

Démonstration du lemme 3.5. : Si Φ admet une orbite cylindrique le lemme 3.5 est une conséquence des lemmes 2.4, 2.5, 2.6, et 2.7 du (§II.2).

Si toutes les orbites de Φ sont planes le lemme 3.5 est une conséquence de la classification des feuilletages de Reeb de $T^2 \times I$ de [1].

COROLLAIRE 3.6. - Si Φ est une action non dégénérée de $\mathbb{R}^2$ sur $T^2 \times I$ telle que $T^2 \times \{0\}$ et $T^2 \times \{1\}$ soient les seules orbites compactes de Φ alors les orbites ouvertes sont des plans ou des cylindres mais il n'y a aucun mélange de ces deux types d'orbites.

Démonstration du corollaire 3.6. : Ce corollaire est une conséquence directe des lemmes 3.5 et 3.6 et d'une remarque de R. Moussu.

On applique, en effet, le lemme 3.5 aux germes de difféomorphisme donnés par la représentation de $\Pi_1(T^2 \times \{0\})$ dans G définie par l'holonomie du feuilletage $\mathcal{F}(\Phi)$.

Puisque $T^2 \times \{0\}$ est la seule feuille compacte au voisinage de $T^2 \times \{0\}$, les générateurs de $\Pi_1(T^2 \times \{0\})$ peuvent être choisis de telle sorte que les germes de difféomorphismes associé soient des contractions.

Démonstration du théorème 3.3. : Soit donc le feuilletage $\mathcal{F}(\Phi)$ de $T^2 \times I$ tangent à $\partial(T^2 \times I)$. On sait que chaque feuille compacte de $\mathcal{F}(\Phi)$ est isotope à $T^2 \times \{0\}$. Soit K l'ensemble (compact) des feuilles compactes.

$\overline{T^2 \times I - K} = \bigcup_{i=1}^{\infty} W_i$ où les W_i sont connexes et difféomorphes à $T^2 \times I$. De plus les W_i sont invariants par Φ et les feuilles de $\mathcal{F}(\Phi)$ dans $\text{int } W_i$ sont toutes planes ou toutes cylindriques (3.6).

Choisissons une orientation transverse de $\mathcal{F}(\Phi)$.

Notons $W_1^o, \dots, W_r^o$ les W_i tels que l'orientation induite sur les deux composantes du bord de W_i par l'orientation de $\mathcal{F}(\Phi)$ soient opposées, i.e. : Si, sur l'une des composantes du bord de W_i le champ normal pointe vers l'intérieur de W_i (respectivement vers l'extérieur) alors le champ normal sur l'autre composante du bord pointe vers l'intérieur de W_i (respectivement vers l'extérieur). Par continuité il est clair que seules un nombre fini de W_i vérifient une telle propriété.

Notons $c_1, \dots, c_s$ les composantes connexes de l'adhérence du complémentaire de $W_1^o \cup \dots \cup W_r^o$ dans $T^2 \times I$.

Soient $p_k^{i_k}$ une famille de plongements de $T^2 \times I$ dans $T^2 \times I$, $1 \leq k \leq n$, vérifiant les propriétés :

i) pour $i_k = 0$, $p_k^{i_k}(T^2 \times I)$ est un des W_j^0 pour $1 \leq j \leq r$,

ii) pour $i_k = 1$, $p_k^{i_k}(T^2 \times I)$ est un des c_j pour $1 \leq j \leq s$,

iii) $p_i^1(T^2 \times \{0\}) = T^2 \times \{0\}$

$p_n^1(T^2 \times \{1\}) = T^2 \times \{1\}$

$p_k^{i_k}(T^2 \times \{1\}) = p_{k+1}^{i_{k+1}}(T^2 \times \{0\})$ pour $1 \leq k \leq n-1$

(on note bien sûr que $n = r + s$).

On peut représenter, en coupe, cette indexation par la figure 2.

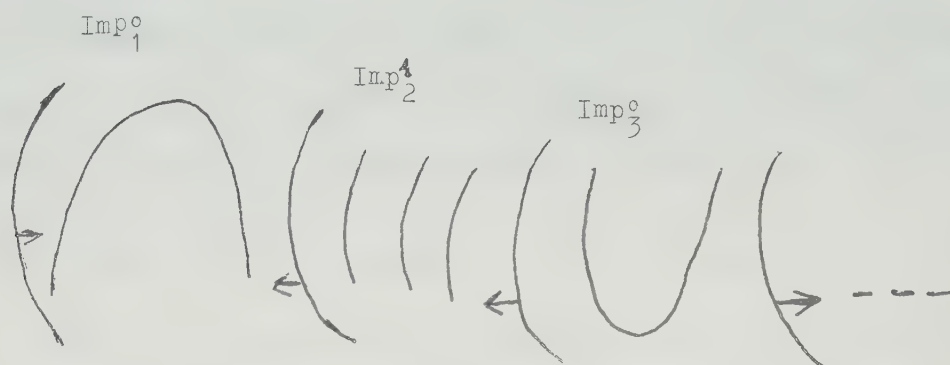


figure 2.

Nous allons tout d'abord construire la conjugaison pour les c_j puis pour les W_k^0 ; les c_j sont conjugués aux modèles de type $\mathcal{I}(\chi)$ pour une certaine représentation χ et les W_k^0 sont conjugués aux modèles de type $\mathcal{I}(\alpha, 0)$ ou $\mathcal{I}(c, 0)$.

LEMME.- Soit c_j une des sous-variétés définies ci-dessus et notons N le champ normal à $\mathcal{I}(\Phi)$.

Soit k l'entier tel que $p_k^{i_k}(T^2 \times I) = p_k^1(T^2 \times I) = c_j$. Il existe un champ de vecteur X_j défini sur c_j , transverse à $\mathcal{I}(\Phi)$ et qui vérifie :

i) $X_j = N$ sur les orbites compactes de Φ dans c_j .

ii) chaque orbite de X_j commence en un point de $P_k^1(T^2 \times \{0\})$ coupe $P_k^1(T^2 \times \{1\})$.

Démonstration du lemme 3.7. : Supposons que N pointe vers l'intérieur de c_j sur $P_k^1(T^2 \times \{0\})$. Comme plus haut on note $\bigcup_{n=1}^{\infty} W_{j,n}$ l'adhérence du complémentaire, dans c_j , des feuilles compactes de c_j . Les $W_{j,n}$ sont difféomorphes à $T^2 \times I$, invariant par Φ , et Φ n'a pas d'orbites compactes dans l'intérieur des $W_{j,n}$.

Dans chaque $W_{j,n}$ nous allons construire un champ de vecteur $X_{j,n}$, transverse à $\mathcal{F}(\Phi) \cap W_{j,n}$ et qui coïncide avec N dans un voisinage de $\partial(W_{j,n})$.

Pour cela considérons T' et T'' les tores transverses plongés dans $\text{int } W_{j,n}$ et donnés par le lemme 3.5 et soit Y le champ de vecteur défini également dans le lemme 3.5. Les feuilletages induits par $\mathcal{F}(\Phi)$ sur T' et T'' sont conjugués par les orbites du champ Y et cette "classe" de feuilletage est équivalente soit au flot irrationnel sur T^2 soit au feuilletage produit $S^1 \times \{0\}$ de T^2 .

T' et T'' bordent une sous-variété W de $W_{j,n}$ telle que le feuilletage de W induit par $\mathcal{F}(\Phi)$ soit équivalent au feuilletage produit du feuilletage $T' \cap \mathcal{F}(\Phi)$ par I ; la conjugaison est en effet fournie par les orbites du champ Y . Cette équivalence permet de construire un champ X_0 dans W , transverse à $\mathcal{F}(\Phi) \cap W$, tel que X_0 pointe vers l'intérieur de W sur T' et tel que chaque orbite du champ X_0 commençant en un point de T' coupe T'' . Par construction, on sait d'autre part, que chaque orbite de N commençant en un point de $\partial W_{j,n}$ coupe T' ou T'' . Ainsi on peut étendre le champ X_0 sur toute les sous-variétés $W_{j,n}$ de façon à obtenir un champ $X_{j,n}$ transverse à $\mathcal{F}(\Phi) \cap W_{j,n}$ et coïncidant avec N sur $\partial(W_{j,n})$.

On obtient ainsi un champ X_j sur c_j tout entier en prenant $X_j = X_{j,n}$ sur les $W_{j,n}$ et $X_j = N$ sur les orbites compactes de Φ contenues dans c_j .

Le champ X_j a la propriété que chaque orbite de X_j partant d'un point de $p_k^1(T^2 \times \{0\})$ coupe $p_k^1(T^2 \times \{1\})$. On peut ainsi reparamétriser X_j de telle sorte que les orbites de X_j mettent un temps 1 pour aller d'une composante du bord de c_j à l'autre, ce qui termine la démonstration du lemme 3.7.

LEMME 3.8.- Il existe une représentation χ_j de $\Pi_1(T^2)$ dans G telle que $c_j \cap \mathcal{F}(\Phi)$ soit équivalent à $\mathcal{F}(\chi_j)$.

Démonstration du lemme 3.8. : L'identification des orbites de X_j en un point définit une fibration $c_j \rightarrow T^2$ de fibre I et $\mathcal{F}(\Phi) \cap c_j$ est transverse aux fibres. De tels feuilletages sont définis par une représentation χ_j de $\Pi_1(T^2)$ dans G [3] , [17] . De plus la conjugaison peut être construite de telle sorte que, si l'on note $H_j : c_j \rightarrow (T^2 \times I, \mathcal{F}(\chi_j))$ la conjugaison, $H_j \circ p_k^1 = \text{id}$ sur $\partial(c_j)$. [17] .

LEMME 3.9.- Pour $1 \leq k \leq r$, le feuilletage $\mathcal{F}(\Phi) \cap W_k^0$ est équivalent à un feuilletage du type $\mathcal{F}(\alpha, 0)$ ou $\mathcal{F}(c, 0)$.

Démonstration du lemme 3.9. : Si toutes les feuilles du feuilletage $\mathcal{F}(\Phi) \cap W_k^0$ dans $\text{int } W_k^0$ sont planes, c'est un résultat de [1] qui montre qu'alors ce feuilletage est équivalent à un $\mathcal{F}(\alpha, 0)$ pour un certain α irrationnel. La conjugaison

$$H_k^0 : (W_k^0, \mathcal{F}(\Phi) \cap W_k^0) \rightarrow (T^2 \times I, \mathcal{F}(\alpha, 0))$$

construite dans [1] est telle que $H_k^0 \circ p_k^0 = \text{identité}$ sur $\partial(T^2 \times I)$.

Si toutes les feuilles de $\mathcal{F}(\Phi) \cap W_k^0$ ne sont pas planes dans $\text{int } W_k^0$ on sait alors (corollaire 3.6) qu'elles sont toutes cylindriques. Il n'est alors pas très difficile de construire une conjugaison avec un feuilletage de type $\mathcal{F}(c, 0)$ en se servant du champ Y défini dans le lemme 3.5.

En effet, soient T' et T'' les tores transverses à (Φ) construits dans le lemme 3.5. $T' \cup T''$ borde dans W_k^0 une sous-variété W et le feuilletage $\mathcal{F}(\Phi) \cap W$ est équivalent au feuilletage produit $S^1 \times \{0\} \times I$ de $T^2 \times I$; on obtient trivialement cette équivalence en utilisant le champ Y .

Soient A et B les composantes connexes de l'adhérence du complémentaire de W dans W_k^0 .

On définit la conjugaison H_k^0 sur $A \cup B$ en utilisant l'holonomie des feuilles compactes de W_k^0 (qui sont les composantes de ∂W_k^0). Cette construction est faite précisément dans [1] en utilisant le procédé suivant : Sachant que deux germes de difféomorphisme de $\mathbb{R}^+$ en 0 qui ont 0 pour seul point fixe et qui sont contractants sont toujours conjugués par un germe d'homéomorphisme [26] on peut définir la conjugaison H_k^0 sur un morceau de transversal (pris sur le facteur I) qui va de $T^2 \times \{0\} \in \partial W_k^0$ (respectivement $T^2 \times \{1\}$) à T' (respectivement T'') ; cela étant, l'holonomie portée par les feuilles $T^2 \times \{0\}$ et $T^2 \times \{1\}$ de ∂W_k^0 permet facilement d'étendre H_k^0 à tout $A \cup B$.

Ainsi on peut définir H_k^0 sur $A \cup W$ et sur B . En modifiant au besoin le champ Y , on voit, par ailleurs, que les deux définitions de H_k^0 sur $T'' = (A \cup W) \cap B$ ne diffèrent que par un homéomorphisme homotope (donc isotope) à l'identité sur T'' .

Ces remarques permettent de définir H_k^0 sur W_k^0 et de plus on a

$$H_{k-k}^{0p0} = \text{identité sur } \partial(T^2 \times I) \text{ .}$$

On achève la démonstration du théorème 3.3 en recollant les conjugaisons H_j du lemme 3.8 et H_k^0 du lemme 3.9. La conjugaison H ainsi obtenue passe au quotient $T^2 \times I / f$, $f \in \text{Diff}^+(T^2)$, par construction

$$(H|_{\partial(T^2 \times I)} = \text{id}|_{\partial(T^2 \times I)}) \text{ .}$$

III.4.

QUELQUES REMARQUES ET GENERALISATIONS.

Une idée de H. Rosenberg permet de généraliser le théorème 2.2 (§III.2) et d'obtenir le résultat en toutes dimensions.

La démonstration que nous donnons ci-dessous utilise des résultats de Moussu et Tischler (voir [7]) mais elle est plus simple que celle donnée pour le Théorème 2.2, et est valable également en dimension 3.

L'intérêt du Théorème 2.2 est qu'il fournit un résultat général sur les variétés de dimension 3 et de rang 2. Par contre, les fibrés $T^n \times I/F$ (fibrés orientables sur S^1 de fibre T^n) ne représentent pas, pour l'instant, toutes les variétés de rang n ; mais il faut noter que les résultats récents obtenus par Chatelet-Rosenberg sur les actions de $\mathbb{R}^n$ (voir la fin de la partie II) montrent que ces fibrés jouent un rôle essentiel dans la classification des variétés de rang n .

Plus précisément, si Φ est une action non-dégénérée de $\mathbb{R}^n$ sur une variété V , fermée, orientable, de dimension $n+1$, et si Φ admet une orbite compacte, alors V est difféomorphe à un fibré du type $T^n \times I/F$ (où F est un difféomorphisme de T^n conservant l'orientation).

Si Φ n'admet pas d'orbite compacte, V est fibré sur S^1 et la fibre F est elle-même un fibré sur T^k de fibre T^{n-k} . Un problème encore ouvert est donc de savoir si oui ou non cette fibre F est toujours un fibré trivial.

THEOREME 4.1.- Soit $V = T^n \times I/F$ un fibré orientable sur S^1 de fibre T^n où $F \in \text{Diff}^+(T^n)$. Soit F_* le morphisme de $\Pi_1(T^n) \rightarrow \Pi_1(T^n)$ induit par F .

Si F_* n'a pas de valeurs propres dans $\mathbb{Z}$ toute action non dégénérée de $\mathbb{R}^n$ sur V admet des feuilles compactes (homéomorphes à T^n).

Démonstration du Théorème 4.1 : Nous allons tout d'abord montrer que, si Φ est une action non dégénérée de $\mathbb{R}^n$ sur V n'admettant aucune orbite compacte, alors $H_1(V, \mathbb{R})$ est de rang > 1 . Nous montrerons ensuite que si F_* n'a pas de valeurs propres dans $\mathbb{Z}$, alors $H_1(V, \mathbb{R})$ est de rang 1.

1°) Soit Φ une action non dégénérée de $\mathbb{R}^n$ sur V sans orbite compacte, et soit L une orbite quelconque de Φ .

Notons $\mathcal{R}$ le feuilletage de V associé à Φ et $D = [\Pi_1(V), \Pi_1(V)]$ le groupe des commutateurs de $\Pi_1(V)$.

Φ n'ayant pas d'orbites compactes, le feuilletage $\mathcal{R}$ est sans holonomie [22] et nous pouvons appliquer des résultats de R. Moussu et D. Tischler (voir [7]) pour savoir que :

- a) V est fibré sur S^1 de fibre F
- b) $D \subset \Pi_1(L)$
- c) $\Pi_1(L) \subset \Pi_1(F)$
- d) $\Pi_1(F)/\Pi_1(L)$ est abélien libre
- e) L est un revêtement de F .

On a les suites exactes

$$(1) \quad 0 \rightarrow \Pi_1(L)/D \rightarrow \Pi_1(V)/D \rightarrow \Pi_1(V)/\Pi_1(L) \rightarrow 0$$

et

$$(2) \quad 0 \rightarrow \Pi_1(F)/\Pi_1(L) \rightarrow \Pi_1(V)/\Pi_1(L) \rightarrow \Pi_1(V)/\Pi_1(F) \rightarrow 0$$

Des propriétés d) et e) on tire que $\Pi_1(F)/\Pi_1(L)$ est de rang ≥ 1 car L n'est pas compacte. Par ailleurs la propriété a) montre que $\Pi_1(V)/\Pi_1(F)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$.

Ainsi, de la suite exacte (2) on tire que $\text{rang}(\Pi_1(V)/\Pi_1(L)) \geq 2$ et donc de la suite exacte (1) on tire que :

$$\text{rang}(\Pi_1(V)/_D) = \text{rang}(H_1(V, \mathbb{R})) \geq 2 .$$

2°) Plaçons nous maintenant dans les hypothèses du théorème 4.1 et supposons que F_* n'a pas de valeurs propres dans Z . (Rappelons que les seules valeurs propres possibles sont ± 1).

Soit $p : T^n \times I \rightarrow V$ la projection et notons $T = p(T^n \times \{0\})$.

Soit $T \times [-\varepsilon, \varepsilon]$ un voisinage tubulaire de T dans V .

On note $X_1 = T \times (-\varepsilon, \varepsilon)$, $X_2 =$ complémentaire dans V de $T \times [-\varepsilon/2, \varepsilon/2]$ et $A = X_1 \cap X_2$.

On a alors la suite exacte (Meyer-Vietoris) suivante :

$$H_1(A) \xrightarrow{\alpha} H_1(X_1) \oplus H_1(X_2) \xrightarrow{\beta} H_1(V) \xrightarrow{\Delta} H_0(A) \xrightarrow{\gamma} H_0(X_1) \oplus H_0(X_2)$$

γ est un morphisme du type $(x, y) \mapsto (x+y, -(x+y))$ donc $\text{rang}(\text{Im} \Delta) = 1$ (1).

α est un morphisme de $\mathbb{Z}^n \oplus \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n \oplus \mathbb{Z}^n$ qui envoie (x, y) sur $(x+y, -(x + F_*(y)))$.

Ainsi, si F_* n'a pas de valeurs propres, α est injective et $\text{rang}(\text{Im} \beta) = 0$. (2).

De (1) et (2) on tire facilement que $\text{rang}(H_1(V, \mathbb{R})) = 1$ ce qui achève la démonstration du Théorème 4.1.

Pour terminer ce paragraphe, voici une autre démonstration du Théorème 2.2, (§III.2), intéressante à plusieurs titres car elle fournit des indications sur plusieurs parties de ce travail et qu'elle peut être utilisée en dimension plus grande que 3.

C'est à David Tischler que je dois l'essentiel de ce qui suit.

Soit Φ une action non dégénérée de $\mathbb{R}^2$ sur $V = \mathbb{T}^2 \times \mathbb{I}/\mathbb{F}$ n'admettant pas d'orbite compacte.

Si toutes les orbites de Φ sont planes on sait que $V = \mathbb{T}^3$ [15] et si Φ admet une orbite cylindrique on sait alors que toutes les orbites sont cylindriques et denses [22] .

Supposons donc que les orbites de Φ soient cylindriques et denses dans V . On a vu dans les parties I et II que l'on pouvait alors trouver deux champs de vecteurs X et Y sur V définissant l'action Φ et telles que le champ X ait toutes ses courbes intégrales fermées et de période 1 . Ainsi Φ est en fait une action de $S^1 \times \mathbb{R}$ sur V . On peut donc passer au quotient par l'action de S^1 et on obtient une action libre de $\mathbb{R}$ sur la variété quotient V/S^1 ce qui prouve que V/S^1 est difféomorphe au tore $\mathbb{T}^2$. (Seule variété fermée orientable de dimension 2 admettant un champ de vecteurs sans singularité). (Il faut noter que cette technique s'applique en dimension plus grande dans le cas d'action de $\mathbb{R}^n$ sans orbite compacte).

On peut utiliser les remarques ci-dessus pour obtenir, par exemple, une démonstration du Théorème 2.2.

En effet, on obtient V comme fibré sur $\mathbb{T}^2$ de fibre S^1 et il n'est pas difficile de voir que si $V = \mathbb{T}^2 \times \mathbb{I}/\mathbb{F}$ est aussi fibré sur $\mathbb{T}^2$ de fibre S^1 , alors F^* admet des valeurs propres dans $\mathbb{Z}$.

On voit aussi qu'aux actions de $\mathbb{R}^2$ ayant toutes leurs orbites cylindriques et denses on peut associer un nombre de rotation α (irrationnel) en utilisant le Théorème de Denjoy (on suppose l'action de classe ≥ 2).

En effet, en passant au quotient par l'action de S^1 , comme ci-dessus, on

obtient une action libre de $\mathbb{R}$ sur T^2 et de telles actions sont classifiés pour les nombres irrationnels. Ceci est à rapprocher du §III.3 et pose le problème suivant : Ce nombre de rotation classe-t-il les actions de $\mathbb{R}^2$ sur les variétés de dimension 3 sans orbites planes et compactes ?

Enfin, cette technique donne une démonstration du Théorème principal de la partie II dans le cas où l'action Φ n'admet ni orbites planes ni orbites compactes. En effet il n'est pas difficile de voir que V est alors un fibré sur S^1 de fibre T^2 (V est fibré sur T^2 de fibre S^1 et il suffit de projeter $T^2 = S^1 \times S^1$ sur l'un des facteurs S^1 pour obtenir V comme fibré sur S^1 de fibre T^2 , la nouvelle fibre ne pouvant être une bouteille de Klein car elle doit admettre un voisinage tubulaire trivial dans V) ce qui permet de se passer, dans ce cas, du lemme de fermeture démontrée dans la partie I.

APPENDICE

-:-:-

EQUIVALENCE DES FIBRES SUR S^1 DE FIBRE T^2 .

En observant le comportement des tores incompressibles dans les variétés fibrés $V = T^2 \times I / F$ (Partie III) on est amené à se poser la question suivante : Peut-on trouver, sur un même espace total V , des structures distinctes de fibré sur S^1 et de fibre T^2

DEFINITION A.0.- Deux fibrés V et V' ayant même base et même fibre sont isomorphes s'il existe un homéomorphisme de V sur V' qui envoie fibre sur fibre.

Nous ne nous intéressons donc pas, pour l'instant, au groupe des fibrés, mais nous verrons plus loin comment rattacher les résultats énoncés ci-dessous avec le théorème de classification des fibrés sur les sphères (ici sur S^1) (voir Steenrod [27]) .

Nous démontrons dans cet appendice le résultat suivant : si les espaces totaux de deux fibrés orientables sur S^1 de fibre T^2 sont homéomorphes alors les deux fibrés sont isomorphes.

THEOREME A.1.- Soient $V = T^2 \times I / f$ et $V' = T^2 \times I / f'$ deux fibrés orientables sur S^1 de fibre le tore T^2 . Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- i) Les classes d'isotopie de f et de f' sont conjugués dans $\text{Diff}(T^2)$.
- ii) V et V' sont isomorphes (i.e. : Il existe un homéomorphisme de V

sur V' qui envoie fibre sur fibre).

iii) V et V' sont homéomorphes.

Démonstration du Théorème A.1.-:

i) $\implies$ ii)

Soit $F \in \text{Diff}(T^2)$ tel que f' et FfF^{-1} soient isotopes, donc pseudo-isotope et soit $H : T^2 \times I \rightarrow T^2 \times I$ un difféomorphisme qui réalise la pseudo-isotopie entre F et $f'Ff^{-1}$. H envoie $x \in T^2 \times \{0\}$ sur $F(x) \in T^2 \times \{0\}$ et envoie $f(x) \in T^2 \times \{1\}$ sur $f'(F(x)) \in T^2 \times \{1\}$. Ainsi H passe au quotient et définit un isomorphisme du fibré $T^2 \times I/f$ sur le fibré $T^2 \times I/f'$.

N.B. En prenant $\text{Diff}(T^2)$ comme groupe structural des fibrés on peut utiliser la classification des fibrés sur les sphères, [27], pour démontrer i) $\implies$ ii).

iii) $\implies$ i)

Soit $h : V' \rightarrow V$ un homéomorphisme. Si T'_0 est une fibre de V' , $h(T'_0) = T$ est un tore plongé, incompressible, dans V et qui ne sépare pas V en deux composantes connexes. Il est clair que h définit sur V une deuxième structure de fibré sur S^1 de fibre T^2 , isomorphe à V' , et iii) $\implies$ i) revient donc à démontrer que ces structures sur V sont isomorphes, i.e. : Si l'on coupe V le long de T on obtient une variété $M(T) \approx T^2 \times I$ et V s'obtient comme quotient de $M(T)$ par un élément $f' \in \text{Diff}^+(T^2)$ dont nous voulons montrer que la classe d'isotopie est conjuguée à celle de f

$$(V \approx T^2 \times I/f \approx T^2 \times I/f').$$

Notons tout d'abord que si T est parallèle aux fibres (Def. D.O. (§III.1.D)) i.e. : si T est isotope à une fibre de $V = T^2 \times I/f$, le résultat est trivialement vérifié (f et f' sont isotopes).

Nous pouvons donc supposer que T n'est pas parallèle aux fibres ce qui entraîne (Théorème D.2. (§III.1.D)) que la matrice représentant la classe d'isotopie de f dans $SL_2(\mathbb{Z})$ a la valeur propre $+1$. Rappelons que cette matrice est déduite directement de l'application $f_* : \Pi_1(T^2) \rightarrow \Pi_1(T^2)$ induite par f et qu'elle définit un morphisme de $\mathbb{Z} \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z})$ qui donne à $\Pi_1(V)$ sa structure de produit semi-directe. Comme f est isotope à un difféomorphisme linéaire du tore, on peut supposer en fait, comme dans la partie III, que f est linéaire.

Avec les notations de la partie III.1.D. on sait qu'il existe dans $\Pi_1(V)$ un système de générateurs a, b, c , possédant les propriétés et relations suivantes :

- (1) $ab = ba$
- (2) $cac^{-1} = a$
- (3) $cbc^{-1} = a^{\alpha}b$
- (4) $\Pi_1(T_0) \subset \Pi_1(V)$ est engendré par (a, b) .
- (5) $\Pi_1(T) \subset \Pi_1(V)$ est engendré par $(a, b^m c^{\gamma})$ avec $\gamma > 0$ et $m \neq 0$.

((1) (2) et (3) définissent $\Pi_1(V)$).

La matrice représentant f est du type $\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (sur la base (a, b)) et nous allons montrer qu'elle est conjuguée à la matrice représentant f' .

Pour cela nous aurons besoin d'un certain nombre de propriétés algébriques simples dont nous donnerons les démonstrations bien qu'elles se trouvent, sans doute, quelque part dans la littérature.

PROPOSITION A.2.- Soit H un groupe abélien sur deux générateurs B et C avec la relation $B^m C^{\gamma} = 1$. Alors H est isomorphe à $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} / d\mathbb{Z}$ où d est le p.g.c.d. de m et γ .

COROLLAIRE A.3.- Les entiers m et γ définis dans la relation (5) ci-dessus sont premiers entre eux.

Démonstration du corollaire A.3. : D'après la suite exacte de fibration, le quotient $\Pi_1(V)/\Pi_1(T)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$. Si B = classe de b et C = classe de c , ce quotient se présente comme un groupe abélien sur B et C avec la relation $B^m C^\gamma = 1$ et le corollaire se déduit trivialement de la proposition A.2.

Démonstration de la proposition A.2. : H est isomorphe au quotient de $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ par le noyau de l'application φ de $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ sur H qui envoie $(1,0)$ sur B et $(0,1)$ sur C .

On a : $\ker \varphi \simeq \mathbb{Z}$ est engendré par l'élément $(m, \gamma) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Soit d le p.g.c.d. de m et de γ et soient m' et γ' , entiers premiers entre eux, tels que $m = dm'$ et $\gamma = d\gamma'$. Alors $\ker \varphi$ est engendré par l'élément $d(m', \gamma')$ et on peut prendre (m', γ') comme premier élément d'une base du $\mathbb{Z}$ -module $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

Après ce changement de base, on déduit trivialement la proposition A.2.

Remarquons maintenant que $\Pi_1(V)$ se présente comme le produit semi-directe du sous-groupe invariant engendré par $(a, b^m c^\gamma)$ (sous-groupe correspondant à la fibre T de $V = T^2 \times I_{/f'}$) isomorphe à $\mathbb{Z}$, engendré par un élément c_1 . par un sous-groupe $\checkmark$ (correspondant à la base S^1 du fibré V), au-dessus d'un élément de $SL_2(\mathbb{Z})$ défini par la classe d'isotopie de f' . (On peut écrire, symboliquement, que $\Pi_1(V) = (a, b)_{*f'}(c)$ et $\Pi_1(V) = (a, b^m c^\gamma)_{*f'}(c_1)$ où $*_{f'}$ représente le produit semi-directe au-dessus du morphisme $\mathbb{Z} \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z})$ où l'image du générateur c est l'élément de $SL_2(\mathbb{Z})$ défini par f (sur la base (a, b)).

On a besoin du lemme suivant :

LEMME A.4. - Si on met $c_1 \in \Pi_1(V)$ sous la forme (définie d'une manière unique) $a^{r_1} b^{r_2} c^{r_3}$, alors r_2 et r_3 vérifient une relation de la forme $r_3^m - r_2 \gamma = 1$.

Démonstration du Lemme A.4. : Le quotient $\Pi_1(V)/\Pi_1(T)$ est d'une part engendré par la classe de l'élément $b^\mu c^\lambda$ défini par la proposition A.2. et le corollaire A.3. ($\lambda m - \mu \gamma = 1$) et d'autre part par la classe de l'élément c_1 .

On a donc une relation du type

$$c_1 = a^k (b^m c^\gamma)^{k'} b^\mu c^\lambda$$

pour un certain couple d'entiers (k, k') .

En utilisant les règles de calcul sur le produit semi-direct $\Pi_1(V)$ et l'unicité de l'écriture d'un élément sous la forme $a^{r_1} b^{r_2} c^{r_3}$, l'identification

$$a^{r_1} b^{r_2} c^{r_3} = a^k (b^m c^\gamma)^{k'} b^\mu c^\lambda \quad \text{donne :}$$

$$r_3 = k' \gamma + \lambda$$

$$r_2 = k' m + \mu$$

De ces deux relations et de la relation $\lambda m - \mu \gamma = 1$.

On tire

$$r_3^m - r_2 \gamma = 1.$$

Nous pouvons maintenant achever la démonstration $\text{iii}) \Rightarrow \text{i})$ du théorème A.1.

Nous avons deux présentations différentes de $\Pi_1(V)$;

- D'une part :

$\Pi_1(V)$ est engendré par a, b , et c avec les relations :

$$\begin{aligned} ab &= ba \\ cac^{-1} &= a \quad (1) \\ cbc^{-1} &= a^{\alpha} b \end{aligned}$$

et la matrice $\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ représente (sur (a, b)) la classe d'isotopie de f .

- D'autre part :

$\Pi_1(V)$ est engendré par a_1, b_1 , et c_1 où

$$\begin{aligned} - a_1 &= a \\ - b_1 &= b^m c^\gamma \\ - c_1 &= a^r b^\mu c^\lambda, \quad \lambda m - \mu \gamma = 1 \end{aligned}$$

avec les relations :

$$\begin{aligned} a_1 b_1 &= b_1 a_1 \\ c_1 a_1 c_1^{-1} &= a_1^{\alpha_1} b_1^{\beta_1} \quad (2) \\ c_1 b_1 c_1^{-1} &= a_1^{\alpha_2} b_1^{\beta_2} \end{aligned}$$

et la matrice $\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix}$ représente (sur (a_1, b_1)) la classe d'isotopie de

f' .

Nous allons montrer que les matrices $\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix}$ sont égales

et donc que les classes d'isotopie qu'elles représentent sont conjuguées, ce qui achèvera la démonstration du théorème A.1.

Soit u l'endomorphisme du groupe libre sur les générateurs a, b et c défini par :

$$- u(a) = a_1 = a$$

$$- u(b) = b_1 = b^m c^\gamma$$

$$- u(c) = c_1 = a^r b^\mu c^\lambda$$

L'endomorphisme u passe au quotient par le sous-groupe des relations (1) pour donner un automorphisme de $\Pi_1(V)$.

Pour montrer que u passe au quotient il suffit de voir que u est compatible avec la relation $cbc^{-1} = a^\alpha b$, donc que :

$$a^\alpha b^m c^\gamma (= u(a^\alpha b)) = u(c) u(b) u(c^{-1}) (= u(cbc^{-1}))$$

or :

$$u(c) u(b) u(c^{-1}) = a^r b^\mu c^\lambda b^m c^\gamma c^{-\lambda} b^{-\mu} a^{-r}$$

En écrivant $u(c) u(b) u(c^{-1})$ sous la forme (unique) $a^{k_1} b^{k_2} c^{k_3}$ et en identifiant on trouve (en remarquant que, d'une manière générale dans $\Pi_1(V)$, $c^r b^s = a^{\alpha rs} b^s c^r$) :

$$- k_2 = m$$

$$- k_3 = \gamma$$

$$- k_1 = -\alpha\mu(\gamma - \lambda) + \alpha\lambda(m - \mu) = \alpha$$

donc u est un endomorphisme surjectif de $\Pi_1(V)$. Par ailleurs u est injectif :

En effet si $u(a^{k_1} b^{k_2} c^{k_3}) = 1$ on a :

$$a^{k_1} (b^m c^\gamma)^{k_2} (a^r b^\mu c^\lambda)^{k_3} = 1 \quad \text{ce qui donne les relations :}$$

$$- k_2 m + k_3 \mu = 0$$

$$- k_2 \gamma + k_3 \lambda = 0$$

Puisque $\lambda\mu - \mu\lambda = 1$ on obtient l'unique solution $k_1 = k_2 = k_3 = 0$ et u est donc un automorphisme de $\Pi_1(\tilde{V})$.

$$\begin{aligned} \text{Ainsi } - c_1 a_1 c_1^{-1} &= u(cac^{-1})u(a) = a_1 \\ - c_1 b_1 c_1^{-1} &= u(cbc^{-1}) = u(a^{\alpha}b) = a_1^{\alpha}b_1, \end{aligned}$$

ce qui détermine les coefficients de la matrice

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix} \quad \text{par} \quad \begin{matrix} \alpha_1 = 1 \\ \beta_1 = 0 \end{matrix} \quad \text{et} \quad \begin{matrix} \alpha_2 = \alpha \\ \beta_2 = 1 \end{matrix}$$

et, par la remarque faite plus haut, on achève la démonstration du théorème A.1.

Remarques : En faisant intervenir le groupe des fibrés nous obtenons des classes d'équivalences de fibrés distincts de celles que nous avons étudiées.

Soit $(V, S^1, T^2, \text{Diff}^+(T^2))$ un fibré d'espace total V , de base S^1 , de fibre T^2 et de groupes structural $\text{Diff}^+(T^2)$ (les difféomorphismes du tore conservant l'orientation). D'après le théorème de classification des fibrés sur les sphères (Steenrod [27]) nous savons que les classes d'équivalences de tels fibrés sont en bijection avec les classes de conjugaison de $SL_2(\mathbb{Z})$.

Ainsi on peut obtenir deux fibrés V et V' qui sont isomorphes au sens de la définition A.0. mais qui ne sont pas équivalents au sens de Steenrod (fibrés munis du même groupe).

Par exemple les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (inverse l'une de l'autre) de $SL_2(\mathbb{Z})$ sont conjugués dans $GL_2(\mathbb{Z})$ mais ne le sont pas dans $SL_2(\mathbb{Z})$. Elles définissent donc deux fibrés isomorphes (définition A.0) mais non équivalents au sens de Steenrod..

Par ailleurs, dans Waldhausen ([28] corollaire 6.5) on trouve le résultat suivant :

Soient deux variétés M et N de dimension 3 fermées et irréductibles et soit $\phi : \Pi_1(N) \rightarrow \Pi_1(M)$ un isomorphisme. Alors il existe un homéomorphisme de N sur M qui induit ϕ .

Ce résultat et le théorème A.1 permettent de démontrer la proposition (Algébrique) suivante.

$$\text{Soient } 0 \rightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \rightarrow G \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0 \quad (1)$$

$$\text{et } 0 \rightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \rightarrow G' \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0 \quad (2)$$

deux suites exactes de groupes (non commutatifs).

A chacune de ces suites on peut associer, d'une manière unique, un morphisme de $\mathbb{Z}$ dans $\text{Aut}(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z})$.

Soit φ_1 (respectivement φ_2) le morphisme associé à la suite (1) (respectivement (2)).

Sur une base choisie de $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ notons M_1 (respectivement M_2), la matrice de $\text{GL}_2(\mathbb{Z})$ image de 1 par φ_1 (respectivement φ_2).

PROPOSITION A.2.- Si M_1 et M_2 appartiennent à $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ et si G est isomorphe à G' , alors M_1 et M_2 sont conjugués (dans $\text{GL}_2(\mathbb{Z})$) (les suites (1) et (2) sont donc isomorphes).

Démonstration de la proposition A.2. : Il suffit de réaliser géométriquement les suites (1) et (2) par des fibrés orientables sur S^1 de fibre T^2 et d'appliquer le théorème de Waldhausen, cité ci-dessus, et le théorème A.1. pour obtenir ce résultat.

On peut noter qu'une démonstration purement algébrique de la proposition A.2. semble possible et qu'elle permettrait alors de démontrer le théorème A.1 sans recours à des procédés géométriques.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] G. CHATELET-H. ROSENBERG : un théorème de conjugaison de feuilletage, Ann. de l'Inst. Fourier (à paraître).
- [2] G. CHATELET-R. ROSENBERG-D. WEIL : A classification of the topological types of $\mathbb{R}^2$ -actions on closed orientable 3-manifolds, Publ. I.H.E.S. (à paraître).
- [3] A. HAEFLIGER : Variétés feuilletées, Ann. E. Norm. Sup. Pise Série 3, 16 (1962), pp. 367-397.
- [4] N. KOPELL : Commuting diffeomorphisms, Proc. of Symp. in Pure Math., Vol. XIV on Global analysis, pp. 165-184.
- [5] E. LIMA : Common singularities of commuting vector fields on 2-manifolds, Comment. Math. Helv. 39 (1964) pp. 97-110.
- [6] E. LIMA : Commuting vector fields on S^3 , Ann. of Math. (2) 81, (1965) pp. 70-81.
- [7] R. MOUSSU : Sur les feuilletages de codimension 1, Thèse (Orsay (1971)).
- [8] S.P. NOVIKOV : Topology of foliations, Trudy Moskov. Math. Obsc. 14 (1965) pp. 248-278.
- [9] M.M. PEIXOTO : Structural stability on 2-dimensional manifolds, Topology 1 (1962), pp. 101-120.
- [10] C.C. PUGH : The closing Lemma, Amer. J. Math. (1967).
- [11] G. REEB : Sur certaines propriétés topologiques des variétés feuilletées, Actual. Scient. Ind. (1952).
- [12] H. ROSENBERG : The rank of $S^2 \times S^1$, Amer. J. Math. 87 (1965), pp. 11-26.
- [13] H. ROSENBERG : Singularities of $\mathbb{R}^2$ actions, Topology 7 (1968), pp. 143-145.
- [14] H. ROSENBERG : Actions of $\mathbb{R}^n$ on manifolds, Comment. Math. Helv. 41 (1967) pp. 170-178.
- [15] H. ROSENBERG : Foliations by planes, Topology 7 (1968), pp. 131-138.
- [16] H. ROSENBERG-R. ROUSSARIE : Reeb foliations, Ann. of Math. 91 (1970), pp. 1-24.

- [17] H. ROSENBERG - R. ROUSSARIE : Topological equivalence of Reeb foliations, Topology 9 (1970), pp. 231-242.
- [18] H. ROSENBERG - R. ROUSSARIE - D. WEIL : A classification of closed orientable 3-manifolds of rank two, Ann. of Math., 91 (1970), pp. 449-464.
- [19] R. ROUSSARIE : Sur les feuilletages des variétés de dimension 3, Thèse (Orsay (1969)).
- [20] R. ROUSSARIE : Plongement dans les variétés feuilletées, Centre de Math. de l'Ec. Polyth. (1970).
- [21] R. ROUSSARIE - D. WEIL : Extension du "closing lemma" aux actions de $\mathbb{R}^2$ sur les variétés de dimension 3, J. of Diff. Eq. 8 (1970), pp. 202-228.
- [22] R. SACKSTEDER : Foliations and pseudo-groups, Amer. J. Math. 87 (1965), pp. 79-102.
- [23] A.J. SCHWARTZ : A generalization of the Poincare-Bendixon theorem to closed 2-dimensional manifolds, Amer. J. Math. 85 (1963), pp. 453-458.
- [24] J. STALLINGS : On fibering certain 3-manifolds, Topology of 3-manifolds, Prentice Hall (1962).
- [25] J. STALLINGS : On the loop theorem, Ann. Of Math. 72 (1960), pp. 12-19.
- [26] S. STERNBERG : local C^n transformations of the real line, Duke Math. J. 24 (1957), pp. 97-102.
- [27] N. STEENROD : Topology of fibre bundles, Princeton Univ. Press. (1951).
- [28] F. WALDHAUSEN : On irreducible 3-manifolds which are sufficiently large, Ann. of Math., 87 (1968), pp. 56-88.

-:-:-:-:-

